Der Satz von Schanuel und seine Verallgemeinerung für projektive lineare Unterräume

Diplomarbeit

von

Christian Mathias Christensen

Dem Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund vorgelegt im Februar 2007

Betreuer: HD Dr. Walter Gubler

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der diophantischen Geometrie will man die ganzzahligen Lösungen von polynomialen Gleichungen quantitativ und qualitativ beschreiben. Übersetzt man diophantische Gleichungen geometrisch, so beschreiben die komplexen Lösungen eine algebraische Varietät, und wir suchen die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Oft genügt es, rationale Lösungen zu betrachten, weil jede rationale Lösung durch Multiplikation mit den Nennern auch eine ganzzahlige Lösung induziert. 1922 vermutete Louis Joel Mordell, dass die Zahl der rationalen Lösungen endlich ist, wenn die komplexe Lösungsmenge eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht größer als Eins bildet. Das bedeutet vereinfacht, dass eine rationale polynominale Gleichung in 2 Variablen vom Grad ≥ 4 nur endlich viele rationale Lösungen hat. Bewiesen wurde diese Mordell Vermutung 1983 von Gerd Faltings, der für diese Leistung 1986 die Fieldsmedaille erhalten hat. Beim Beweis der Mordell Vermutung spielt die Größe der Lösungen die zentrale Rolle. Diese Größe wird Höhe genannt. Mittels dieses Begriffs ist es nun möglich Lösungen sinnvoll zu zählen und zu messen. Um dies praktisch Nutzen zu können, wäre es wichtig, dass man eine obere Schranke für die Höhe der Lösungen angeben kann. Mit einem genügend leistungsfähigen Rechner wäre es dann einfach, alle Zahlen bis zu dieser Schranke durchzuprobieren und so alle Lösungen zu finden. Dies ist aber meist sehr schwierig und so auch bei der Mordell Vermutung ungelöst. Dieses Problem führt uns auf den allgemeinen Fall einer glatten projektiven Varietät X der Dimension n. Die n-Formen auf X bilden ein Geradenbündel $\Omega^{\wedge n}$. Dann erwartet man für amples $\Omega^{\wedge n}$, dass die Lösungsmenge endlich ist. Im Fall der Kurven im projektiven Raum gilt $\Omega = \Omega^{\wedge 1}$ ampel genau dann, wenn das Geschlecht der Kurve ≥ 2. Dies deckt sich mit der oben erwähnten Mordell Vermutung. Nun ist aber die Menge der rationalen Punkte von X nicht immer endlich. Für eine Unendlichkeitsaussage wünscht man sich eine asymptotische Abschätzung für die Anzahl $\mathrm{N}(X, T)$ der Lösungen in X, deren Höhe kleiner als T ist. Das einfachste Beispiel für eine Lösungsmenge mit unendlich vielen rationalen Punkten ist $X = \mathbb{P}_K^{N-1}$ für $N \geq 2$. Der Fall $K = \mathbb{Q}$ ist von Richard Dedekind und Heinrich Weber untersucht und später von Wolfgang M. Schmidt auf Grassmann-Varietäten erweitert worden. Für einen beliebigen Zahlkörper K sei d der Grad der Körpererweiterung, r bzw. s die Anzahl der rellen bzw. komplexen Einbettungen, R der Regulator, $D_{K/\mathbb{Q}}$ der Absolutbetrag der Diskriminante, ω die Anzahl der Einheitswurzlen, h die Klassenzahl und $\zeta_K(N)$ die Zetafunktion des Zahlkörpers K (siehe [Ko] für die Definitionen). Dann hat Stephen H. Schanuel 1979 die folgende

Aussage bewiesen (siehe [S]):

Satz von Schanuel 0.1. *Die Anzahl der Punkte in* $\mathbb{P}_K^{N-1}$ *mit Höhe kleiner gleich* T *ist*

$$\mathrm{N}\left(\mathbb{P}_K^{N-1},T\right)$$
$$=\frac{hR}{\omega\zeta_K(N)}\left(\frac{2^r(2\pi)^s}{\mathrm{D}_{K/\mathbb{Q}}^{n/2}}\right)^N N^{r+s-1}T^{dN}+\begin{cases} O\left(T\log(T)\right) & \text{für } N=2, d=1\\ O\left(T^{dN-1}\right) & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von N *und* K *abhängen kann.*

In dem Fall, dass $(\Omega^{\wedge n})^{-1}$ ampel ist, spricht man von einer Fano-Varietät und man erwartet, dass die Lösungsmenge unendlich ist. Hier gilt im Fall der Kurven, dass X genau dann eine Fano-Varietät ist, wenn $X=\mathbb{P}^1$. Dazu vermutete Yuri Manin eine Asymptotik für die Anzahl der rationalen Punkte in einer genügend kleinen, offenen und dichten Teilmenge U von X ([L4], Section 10.4). Diese nach ihm benannte Manin-Vermutung ist bis jetzt ungelöst. Ein weiteres Resultat stammt von Enrico Bombieri und Walter Gubler ([BG], Theorem 11.10.11). Für eine glatte Kubik X von Grad 3 in $\mathbb{P}^4$ geben sie eine Asymptotik für die Anzahl der rationalen Punkte auf der 2-dimensionalen Geradenschar in X an. Diese Aussage unterstützt die Manin-Vermutung und ihr Beweis benutzt die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Schanuel. Seien dazu, zusätzlich zu den oben getroffenen Definitionen, W ein n-dimensionaler Unterraum von K^N, $\alpha(n)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel und $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)$ die Arakelovhöhe des durch W induzierten projektiven linearen Unterraums L. Dann gilt:

Verallgemeinerter Satz von Schanuel 0.2. *Die Anzahl der Punkte in* L *mit Höhe kleiner gleich* T *ist*

$$\mathrm{N}(L,T)=h\frac{c_n}{\zeta_K(n)}T^{nd}+\begin{cases} O\left(\frac{T}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)\right)\right)+O\left(T\right) & \text{für } d=1, n=2\\ O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^{nd-1}\right)+O\left(T^d\right) & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n *und* K *abhängen kann und*

$$c_n=\frac{R}{\omega}\,\mathrm{D}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}^{-n/2}\,n^{r+s-1}\alpha(n)^r\{2^n\alpha(2n)\}^s\,\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^{-d}.$$

Im Gegensatz zum Satz von Schanuel wird hier nun die relative Situation für einen Unterraum W betrachtet. Zusätzlich wird die von Schanuel für die Höhe benutzte

Maximums-Norm durch die L^2-Norm ersetzt, um die Anwendbarkeit der verallgemeinerten Aussage in der Arakelov Geometrie zu gewährleisten. Die Verallgemeinerung des Satzes von Schanuel ist in [BG], Theorem 11.10.14 etwas anders formuliert. Dort tritt in beiden Fällen der zweite Fehlerterm, der für die Anwendung unbedeutend ist, nicht in Erscheinung. Bombieri und Gubler haben einen Beweis für den Fall $K = \mathbb{Q}$ gegeben, der in dieser Diplomarbeit aufgeriffen wird. Der allgemeine Fall blieb offen und wird in dieser Diplomarbeit bewiesen. Ähnlich explizite Aussagen hat Thunder 1992 in [Th1] für Grassmann-Varietäten und 1993 in [Th2] für Fahnenvarietäten bewiesen. Im Unterschied zur Aussage dieser Diplomarbeit gelten Thunder's Resultate nur für $T \to \infty$. Dies genügt aber nicht, um die oben erwähnte Anwendung für die glatte Kubik in $\mathbb{P}^4$ beweisen zu können.

Zum Aufbau der Diplomarbeit: Im 1. Kapitel werden die Terminologie und die in der Literatur nicht eindeutig definierten Begriffe festgelegt. Für die in der algebraischen Zahlentheorie benutzten Standardnotationen verweisen wir den Leser auf das Buch [Ko]. Im Anschluss werden die benötigten Resultate über die Riemannsche und Dedekindsche Zetafunktion bereitgestellt. Das 2. Kapitel beschäftigt sich mit dem Konzept der Höhen. Dafür stellen wir zunächst einige wichtige Grundlagen über die Absolutbeträge auf Zahlkörpern, die Vervollständigung und den projektiven Raum bereit. Dies ermöglicht uns dann die in der Arakelov Geometrie benötigte Arakelov Höhe für Punkte einzuführen. Darauf aufbauend kommen wir zur Höhe eines Unterraumes. Zum Abschluß des Kapitels zitieren wir ein wichtiges Resultat über das Volumen eines Gitters und verallgemeinern dieses so, dass es auf unsere spätere Situation anwendbar ist. Im 3.Kapitel wird zur Motivation des allgemeinen Falls der verallgemeinerte Satz von Schanuel im Fall $K = \mathbb{Q}$ detailiert bewiesen. Der Beweis gliedert sich in drei Schritte und benutzt das in Kapitel 2 erarbeitete Resultat über das Volumen eines Gitters sowie ein Lemma aus der Geometrie der Zahlen. Im 4. Kapitel beginnen wir mit den Vorarbeiten für den Beweis der Verallgemeinerung des Satzes von Schanuel, indem wir den Divisorensatz von Schanuel verifizieren. In einem ersten Schritt reduzieren wir die Aussage auf das Problem, die Anzahl von Gitterpunkten in einem bestimmten beschränkten Gebiet in einem gegebenen euklidischen Raum zu zählen. Dazu ist wie im Fall $K = \mathbb{Q}$ wieder ein Lemma aus der Geometrie der Zahlen nötig, das wir im Gegensatz zu Schanuel in einer verfeinerten Version anwenden, um der relativen Situation gerecht zu werden. Um dann den Beweis des Divisorensatzes abzuschließen, müssen wir das Lebesguemaß des oben genannten Gebietes berechnen und die Parametrisierbarkeit seines Randes prüfen. Letzteres geschieht im 5. Kapitel und wird anhand mehrerer technischer Lemmata ausgeführt. Im 6. Kapitel übersetzen wir den Divisorensatz von Schanuel in eine Aussage für alle Punkte in L und erhalten damit den verallgemeinerten Satz von Schanuel. Dazu führen wir zunächst eine Inversion über alle Ideale durch, mit der sich anschließend der Beweis des verallgemeinerten Satzes von Schanuel durch eine kurze Rechnung beenden lässt.

Ich danke meinem Betreuer Dr. Walter Gubler für die interessante Themenstellung, die zahlreichen Anregungen und die Zeit, die er für mich und meine Fragen hatte.

Dortmund im Februar 2007 *Christian Mathias Christensen*

1 Terminologie und Grundlagen

Wir wollen in dieser Arbeit die Standardterminologie verwenden, hier aber zur Erleichterung die wichtigsten Notationen noch einmal zusammenstellen und die in der Literatur nicht eindeutig definierten Bezeichnungen festlegen. Im zweiten Teil dieses Kapitels definieren wir die Riemannsche und Dedekindsche Zetafunktion und werden im Anschluss kurz die benötigten Resultate wiedergeben.

Terminologie

In der Mengentheorie bedeutet $A \subset B$, dass A eine Teilmenge von B ist, wobei auch $A = B$ zugelassen ist. Für den Fall, dass A eine echten Teilmenge von B ist, schreiben wir $A \subsetneq B$. Wir bezeichen die Kardinalität einer Menge A, das heißt die Anzahl ihrer Elemente, mit $|A|$.

Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind die Körper der rationalen, rellen und komplexen Zahlen. Als positive bzw. negative Zahl bezeichnen wir eine reelle Zahl > 0 bzw. < 0. Mit $\mathbb{R}^+$ ist die Gruppe der positiven reellen Zahlen gemeint. Zusätzlich definieren wir $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Mit ggT(a,b) bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler von a und b. $a|b$ bedeutet das a ein Teiler von b ist. Weiter ist $\mathrm{Re}(z)$ bzw. $\mathrm{Im}(z)$ der Realteil bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl z.

Die untere Gaußklammer $\lfloor x \rfloor$, definiert für $x \in \mathbb{R}$, ist die größte ganze Zahl $\leq x$. Entsprechend ist die obere Gaußklammer $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$.

Für zwei Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, wobei X ein topologischer Raum, bedeutet das Landau-Symbol $f(x) = O(g(x))$, dass $|f(x)| \leq Cg(x)$ für eine positive Konstante C gilt.

K steht für einen Zahlkörper, das heißt eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Wir setzen $d := [K : \mathbb{Q}]$, das heißt der Grad der Körpererweiterung von K über $\mathbb{Q}$ ist d. Für $N \in \mathbb{N}$ sei K^N das kartesische Produkt $K \times \ldots \times K$. Weiter steht X für ein N-Tupel $(x_1, \ldots, x_N) \in K^N$. Insbesondere setzen wir $0^N := (0, \ldots, 0) \in K^N$. Den algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}$ bezeichen wir mit $\overline{\mathbb{Q}}$.

Wir übernehmen die gängigen Notationen für die algebraische Zahlentheorie aus dem Buch [Ko], unter anderem die Begriffe: Maximalordnung $\mathfrak{o}_K$, Klassenzahl h, Norm $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(.)$, Diskriminante $D_{K/\mathbb{Q}}$ und Regulator R.

Definition 1.1. Wir definieren

$$\alpha(n) := \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

als das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ([Kö], Kapitel 7.3, Beispiel 1). Dabei ist $\Gamma(.)$ die Gamma-Funktion.

Zetafunktionen

Definition 1.2.

(a) Eine *arithmetische Funktion* ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

(b) Die *summatorische Funktion* F einer arithmetischen Funktion f ist

$$F(m) := \sum_{n|m} f(n).$$

Beispiel 1.3. Die arithmetische Funktion

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ (-1)^r & \text{für } n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \text{ Produkt von verschiedenen Primzahlen} \\ 0 & \text{sonst, das heißt wenn } n \text{ einen quadratischen Teiler hat,} \end{cases}$$

heißt *Möbiussche μ-Funktion.* Ihre summatorische Funktion ist

$$\epsilon(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 1.4. Sei f eine arithmetische Funktion mit summatorischer Funktion F. Dann gilt die *Möbiussche Umkehrformel*

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d).$$

Beweis: Siehe [Nag], Chapter I, Theorem 15. □

Definition 1.5. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ heißt die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$$

Riemannsche Zetafunktion. Sie hat eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit einfachen Pol in $s = 1$.

Lemma 1.6. Für die Riemannsche Zetafunktion gelten folgende Eigenschaften:

(a) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt das *Eulerprodukt*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

(b) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s}.$$

Beweis: Für Teil (a) siehe [WW], Chapter 13.3. Für $s \in \mathbb{N}$ folgt Teil (b) durch Anwendung der Möbiusschen Umkehrformel. Der allgemeine Fall von Teil (b) ist in [Ja], Theorem 2.2.2 zu finden. □

Definition 1.7. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ definieren wir die *Dedekindsche Zetafunktion* durch

$$\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}} \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s},$$

wobei $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ die Absolutnorm des Ideals $\mathfrak{a}$ und die Summe über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ läuft. Sie hat eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit einfachen Pol in $s = 1$. Für den Spezialfall $K = \mathbb{Q}$ erhalten wir die Riemannsche Zetafunktion, die mit ζ statt mit $\zeta_{\mathbb{Q}}$ bezeichnet wird.

Definition 1.8. Durch

$$\mu(\mathfrak{a}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{o}_K \\ (-1)^r & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r \text{ Produkt von verschiedenen Primidealen} \\ 0 & \text{sonst, das heißt } \mathfrak{a} \text{ teilbar durch ein Quadrat eines Primideals,} \end{cases}$$

definieren wir die *Möbiussche μ-Funktion für Ideale.*

Lemma 1.9. Für die Dedekindsche Zetafunktion gelten folgende Eigenschaften:

(a) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist $\zeta_K(s)$ absolut konvergent.

(b) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt das über alle Primideale $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ von K erstreckte *Eulerprodukt*

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-s}}.$$

(c) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt die über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ von K erstreckte Formel

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^s} = \frac{1}{\zeta_K(s)}.$$

Beweis: Für Teil (a) und (b) siehe [Na], Chapter 7.1, Proposition 7.1. Für Teil (c) siehe [Na], Chapter 7.1, Corollary 2. $\square$

2 Höhen

In diesem Kapitel wollen wir den Begriff der Arakelov Höhe einer Zahl und eines Unterraumes einführen. Dabei folgen wir dem Vorgehen von Bombieri und Gubler, [BG]. Insbesondere übernehmen wir ihre Normalisierungen. Als erstes benötigen wir einige Grundlagen. Dazu geben wir zunächst ein kurzer Überblick über Absolutbeträge auf Zahlkörpern und die Vervollständigung. In diesem Zusammenhang kommen wir auch auf die p-adischen Beträge zu sprechen. Im nächsten Schritt komplettieren wir den affinen Raum K^N und erhalten so den projektiven Raum $\mathbb{P}_K^N$. Anschließend definieren wir die Arakelov Höhe eines Punktes und die Höhe eines Unterraumes. Danach werden wir kurz die wichtigsten Eigenschaften der Höhen wiedergeben. Abschließend zitieren wir ein wichtiges Resultat über das Volumen eines Gitters und verallgemeinern dieses so, dass es in unserer Situation anwendbar ist.

Absolutbeträge und Vervollständigung

Definition 2.1. Ein *Absolutbetrag* auf einem Körper K ist eine reellwertige Funktion $(K \to \mathbb{R})$, so dass $\forall x, y \in K$ gilt:

(i) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

Erfüllt der Absolutbetrag zusätzlich das (stärkere) Axiom

(iii') $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ (ultrametrische Dreiecksungleichung),

heißt er *nicht archimedisch*, ansonsten *archimedisch*.

Definition 2.2. Sei p eine Primzahl und $x \in \mathbb{Q}$. Dann lässt sich x darstellen als $x = p^k \frac{m}{n}$ mit $k, m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(m, p) = 1 = \mathrm{ggT}(n, p)$. Wir definieren die *$p$-adischen Absolutbeträge* $|.|_p$ auf $\mathbb{Q}$ durch

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-k} & x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

$|.|_p$ ist für alle Primzahlen p nicht archimedisch. Weiter bezeichnen wir den üblichen Betrag mit $|.|_\infty$. Er ist der einzige archimedische Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ([J], Theorem 9.4).

Definition 2.3. Sei $|.|$ ein Absolutbetrag auf einem Körper K. K_ν mit dem Absolutbetrag $|.|_\nu$ heißt *Vervollständigung* von K genau dann, wenn gilt:

1. K_ν ist ein Körper.
2. K ist ein Teilkörper von K_ν.
3. $|.|$ und $|.|_\nu$ stimmen auf K überein.
4. K_ν ist vollständig, das heißt jede Cauchyfolge konvergiert.
5. K ist dicht in K_ν.

Bemerkung 2.4. Die Vervollständigung K_ν von K existiert und ist eindeutig bis auf einen isometrischen Isomorphismus ([L1], Proposition XII.2.1).

Definition 2.5. Sei $M_{\mathbb{Q}} := \{|.|_p \mid p \text{ Primzahl oder } p = \infty\}$. Für $x \in K$ und eine Fortsetzung $|.|_\omega$ eines Absolutbetrages aus $M_{\mathbb{Q}}$ definieren wir seinen *normierten Absolutbetrag* $|.|_\nu$ durch

$$|x|_\nu := |x|_\omega^{1/[K:\mathbb{Q}]}.$$

Sei M die Menge der Fortsetzungen der Absolutbeträge von $\mathbb{Q}$ auf $\overline{\mathbb{Q}}$ und M_K die Menge der normierten Fortsetzungen von $M_{\mathbb{Q}}$ auf K.

Projektiver Raum $\mathbb{P}_K^N$

Definition 2.6. $X \sim Y \in K^{N+1}\backslash\{0\} \Leftrightarrow \exists\lambda \in K,\, X = \lambda Y$. Dann heißt der Raum der Äquivalenzklassen

$$\mathbb{P}_K^N := (K^{N+1}\backslash\{0\})/_\sim$$

projektiver Raum der Dimension N. $\mathbb{P}_K^N$ ist also der Raum der 1-dimensionalen Unterräume von K^{N+1}. Die Äquivalenzklasse von $X = (x_0, \ldots, x_N) \in K^{N+1}\backslash\{0\}$ wird mit $(x_0 : \ldots : x_N) \in \mathbb{P}_K^N$, den sogenannten *homogenen Koordinaten* von X, bezeichnet. Diese sind bis auf Vielfache eindeutig bestimmt.
Zum Beispiel ist $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ der Raum der 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung 2.7. Der projektive Raum ist eine (ideale) Komplettierung des affinen Raumes. Geometrisch gesehen ist er perfekt in dem Sinne, dass viele Sätze ohne Ausnahmen gelten.

Definition 2.8. Sei W Unterraum von K^{N+1}, $W \neq \{0\}$. Dann heißt

$$\mathbb{P}_K(W) := \{(x_0 : \ldots : x_N) \in \mathbb{P}_K^N \mid X = (x_0, \ldots, x_N) \in W\}$$

der durch W induzierte *projektive lineare Unterraum*. Er hat Dimension $\dim(W)-1$. Falls $W = \{0\}$, setzen wir $\mathbb{P}_K(W) = \emptyset$ und $\dim(\mathbb{P}_K(W)) = -1$.

Arakelov Höhe

Definition 2.9. Für $X = (x_0, \ldots, x_N) \in \overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$ und $\nu \in M$ setzen wir

$$H_\nu(X) := \begin{cases} \max\limits_{1 \leq i \leq N} (|x_i|_\nu) & \text{falls } \nu \text{ nicht archimedisch.} \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{N} |x_i|_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} & \text{falls } \nu \text{ archimedisch.} \end{cases}$$

Sei $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ ein Zahlkörper. Dann definieren wir für $X \in K^{N+1}$ und $\omega \in M_K$

$$H_\omega(X) := H_\nu(X)^{\frac{[K_\omega : \mathbb{Q}_p]}{[K:\mathbb{Q}]}},$$

wobei $p \in M_\mathbb{Q}$ und $\nu \in M$ so, dass ω eine Fortsetzung von p und ν eine Fortsetzung von ω ist.

Definition 2.10. Nun definieren wir die *Arakelov Höhe* für $P \in \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^N(K)$ mit Repräsentanten $X \in K^{N+1}$ durch

$$h_{\mathrm{Ar}}(P) := \sum_{\omega \in M_K} \log\left(H_\omega(X)\right).$$

Weiter wird die *multiplikative Arakelov Höhe* definiert durch

$$\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(P) := \exp(h_{\mathrm{Ar}}(P)).$$

Bemerkung 2.11. Aus der Produktformel ([BG], Proposition 1.4.4) folgt, dass $h_{\mathrm{Ar}}(P)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentaten X ist. Weiter ist die Definition von $h_{\mathrm{Ar}}(P)$ unabhängig von K ([BG], Corallary 1.3.2).

Definition 2.12. Sei W ein n-dimensionaler Unterraum von $\overline{\mathbb{Q}}$. Das n-te äußere Produkt $\wedge^n W$ ist ein eindimensionaler Unterraum von $\wedge^n \overline{\mathbb{Q}}$. Damit können wir W als Punkt P_W im projektiven Raum $\mathbb{P}(\wedge^n \overline{\mathbb{Q}}^N)$ auffassen. Diesen können wir mit dem projektiven Raum der Dimension $\binom{N}{n}$ identifizieren, indem wir die Standardkoordinaten verwenden. Dann heißt

$$h_{\mathrm{Ar}}(W) := h_{\mathrm{Ar}}(P_W)$$

die *Arakelov Höhe von* W und wie in 2.10 definieren wir die multiplikative *Arakelov Höhe von* W durch

$$\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(W) := \exp(h_{\mathrm{Ar}}(P_W)).$$

Gittervolumen

In diesem Abschnitt sei $\Phi : K^N \to \prod_\nu K_\nu^N \cong \mathbb{R}^{Nd}$ die Diagonaleinbettung, wobei der Index ν über alle archimedischen Elemente aus M_K läuft. Wir zitieren zuerst ein Resultat von Schmidt ([Sch], Theorem 1), das wir anschließend so verallgemeinern, dass es in unserer Situation anwendbar ist.

Theorem 2.13. *Sei* W *ein* n*-dimensionaler Unterraum von* K^N*.* Φ *bildet das* K*-Gitter* $\Lambda := W \cap \mathfrak{o}_K^N$ *in ein* nd*-dimensionales* $\mathbb{R}$*-Gitter* Λ_∞ *im Abschluss von* $\Phi(W)$ *in* $\mathbb{R}^{Nd}$ *ab. Weiter sei* $\mathrm{vol}(\Lambda_\infty)$ *das Volumen der Fundamentalmasche von* $\overline{\Phi(W)}/\Lambda_\infty$ *bezüglich des relativen Lebesguemaßes. Dann gilt:*

$$2^{ns}\,\mathrm{vol}(\Lambda_\infty) = D_{K/\mathbb{Q}}^{n/2}\,\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(W)^d.$$

2.14. Unser Ziel ist es nun, das vorherige Resultat zu verallgemeinern. Sei dazu für den Rest des Kapitels W ein n-dimensionaler Unterraum von K^N und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}_K$. Mit $(\mathfrak{a})^N$ bezeichnen wir die Menge der N-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{a}$. Auch hier bildet Φ ein K-Gitter Λ in ein nd-dimensionales $\mathbb{R}$-Gitter Λ_∞ im Abschluss von $\Phi(W)$ in $\mathbb{R}^{Nd}$ ab. Ab jetzt wollen wir $\Lambda := W \cap (\mathfrak{a})^N$ setzen. Weiter sei wie oben $\mathrm{vol}(\Lambda_\infty)$ das Volumen der Fundamentalmasche von $\overline{\Phi(W)}/\Lambda_\infty$ bezüglich des relativen Lebesguemaßes. Um nun eine zu Theorem 2.13 analoge Aussage für unser neues Gitter Λ_∞ zu erhalten, benötigen wir eine allgemeine Aussage über den Index von Moduln und ein technisches Lemma.

Proposition 2.15. Sei M ein endlich erzeugter torsionsfreier $\mathfrak{o}_K$-Modul und N ein $\mathfrak{o}_K$-Untermodul von M mit endlichem Index. Für ein nicht archimedisches $\nu \in M_K$ sei M_ν bzw. N_ν die Vervollständigung von M bzw. N bezüglich der ν-adischen Topologie. Dann gilt:

$$[M : N] = \prod_\nu [M_\nu : N_\nu]\,,$$

wobei ν über alle nicht archimedischen Elemente aus M_K läuft.

Beweis:

<u>1.Schritt:</u> $K = \mathbb{Q}$

Nach dem Elementarteilersatz ([Bo], Kapitel 2.9, Theorem 2) gibt es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von M und $\lambda_1 | \lambda_2 \ldots | \lambda_n \in \mathbb{N}$ so, dass $\lambda_1 b_1, \ldots, \lambda_n b_n$ eine Basis von N ist. Es gilt:

$$[M : N] = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

Weiter ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von M_ν und $\lambda_1 b_1, \ldots, \lambda_n b_n$ eine Basis von N_ν. Nun sind die Stellen ν im Fall $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}$ die Primzahlen. Setze also $\nu = p$. Damit gilt:

$$M_p / N_p \cong \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}_p / \lambda_j \mathbb{Z}_p = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}_p / p^{e_j} \mathbb{Z}_p \quad \Rightarrow \quad [M_p : N_p] = \prod_{j=1}^{n} p^{e_j}$$

$$\Rightarrow \prod_p [M_p : N_p] = \prod_p \prod_j p^{e_j} = \prod_j \lambda_j,$$

wobei $\lambda = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{e_l}$ die Faktorisierung von λ in Primzahlen ist.

<u>2.Schritt:</u> Allgemein

M und N sind als endlich erzeugte $\mathfrak{o}_K$-Moduln auch endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln. Es gilt für p prim, $\nu \in M_K$ und ν Fortsetzung von p, welches wir hier durch $\nu \mid p$ kennzeichen:

$$\mathfrak{o}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong \prod_{\nu | p} (\mathfrak{o}_K)_\nu. \tag{1}$$

Denn es gilt $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \prod_{\nu | p} K_\nu$ ([BG], Section 1.3) und $\mathfrak{o}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ ist ein $\mathbb{Z}_p$-Untermodul von $\mathfrak{o}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$, weil $\mathfrak{o}_K$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul ist. Damit folgt die Inklusion „$\subset$" in (1) direkt. Die Gleichheit liefert uns der starke Approximationssatz (siehe [BG] Theorem 1.4.5). Wir benutzen die bekannte Identität $M_\nu \cong M \otimes_{\mathfrak{o}_K} (\mathfrak{o}_K)_\nu$. Somit gilt:

$$M_p \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \overset{M \cong M \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_K}{\cong} (M \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong M \otimes_{\mathfrak{o}_K} (\mathfrak{o}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

$$\overset{(1)}{\cong} M \bigotimes_{\mathfrak{o}_K} \prod_{\nu | p} (\mathfrak{o}_K)_\nu \cong \prod_{\nu | p} M \otimes_{\mathfrak{o}_K} (\mathfrak{o}_K)_\nu \cong \prod_{\nu | p} M_\nu.$$

Insgesamt folgt mit dem 1.Schritt:

$$[M : N] = \prod_p [M_p : N_p] = \prod_p \left[\prod_{\nu | p} M_\nu : \prod_{\nu | p} N_\nu \right] = \prod_\nu [M_\nu : N_\nu] .$$

$\square$

Lemma 2.16.
$$\left[\left((\mathfrak{o}_K)^N \cap W\right) : \left((\mathfrak{a})^N \cap W\right)\right] = \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n.$$

Beweis: Wir wählen ein nicht archimedisches $\nu \in M_K$ und setzen $W_\nu := W \otimes_K K_\nu$. Natürlich ist W_ν auch die Vervollständigung von W bezüglich der Maximumsnorm $|X|_\nu := \max_{j=1,\dots,N}(|x_j|_\nu)$ auf K^N.

<u>1.Schritt:</u> $((\mathfrak{a})^N \cap W)_\nu = (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu \subset K_\nu^N$

Offensichtlich gilt $(\mathfrak{a})^N \cap W \subset (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$ und damit $((\mathfrak{a})^N \cap W)_\nu \subset (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$. Sei $X \in (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$ und $\epsilon > 0$. Eine Verallgemeinerung des starken Aproximationssatzes ([BG], Theorem 1.4.5) für W zeigt, dass $Y \in (\mathfrak{o}_K)^N \cap W$ mit $|X - Y|_\nu < \epsilon$ existiert. Weiter dürfen wir in diesem Satz verlangen, dass $|Y|_\omega \leq |\mathfrak{a}|_\omega$ für die endlich vielen $\omega \in M_K$ mit $|\mathfrak{a}|_\omega < 1$. Damit folgt $Y \in (\mathfrak{a})^N$. Dabei wird $|\mathfrak{a}|_\omega$ als der Betrag eines Erzeugenden von $(\mathfrak{a})_\omega$ erklärt. Also können wir jedes Element $X \in (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$ durch Elemente aus $((\mathfrak{a})^N \cap W)_\nu$ approximieren und erhalten „=" im 1.Schritt.

<u>2.Schritt:</u> $((\mathfrak{o}_K)^N \cap W)_\nu = (\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu \subset K_\nu^N$

Folgt für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_K$ aus dem 1.Schritt.

<u>3.Schritt:</u> $[((\mathfrak{o}_K)^N \cap W)_\nu : ((\mathfrak{a})^N \cap W)_\nu] = [(\mathfrak{o}_K)_\nu : (\mathfrak{a})_\nu]^n$

Nun gilt:
$$\left[\left((\mathfrak{o}_K)^N \cap W\right)_\nu : \left((\mathfrak{a})^N \cap W\right)_\nu\right] \overset{\text{1. und 2. Schritt}}{=} \left[\left((\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu\right) : \left((\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu\right)\right].$$

Da $(\mathfrak{o}_K)_\nu$ ein Hauptidealbereich ist, können wir den Elementarteilersatz ([Bo], Kapitel 2.9, Theorem 2) anwenden. Damit existiert eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von $(\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu$ so, dass $\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n$ eine Basis von $(\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$ für $\lambda_1 | \lambda_2 \dots | \lambda_n \in (\mathfrak{o}_K)_\nu$. Es gilt $|b_j|_\nu = 1$, denn sonst haben die Koordinaten einen nichttrivialen Teiler und b_i ist kein Teil einer Basis von $(\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu$. Nun gilt $|\lambda_j b_j|_\nu = |\mathfrak{a}|_\nu$ und mit demselben Argument wie vorher auch $|\lambda_1|_\nu = \dots = |\lambda_N|_\nu = |\mathfrak{a}|_\nu$. Es folgt $(\mathfrak{o}_K)_\nu \lambda_j = (\mathfrak{a})_\nu$. Jetzt können wir diese Argumente zusammensetzen und erhalten:
$$\left[\left((\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu\right) : \left((\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu\right)\right] = \left[\bigoplus_{j=1}^n (\mathfrak{o}_K)_\nu b_j \Big/ \bigoplus_{j=1}^n (\mathfrak{o}_K)_\nu \lambda_j b_j\right]$$
$$= \prod_{j=1}^n [(\mathfrak{o}_k)_\nu : \lambda_j (\mathfrak{o}_K)_\nu] = [(\mathfrak{o}_K)_\nu : (\mathfrak{a})_\nu]^n$$

<u>4.Schritt:</u> $[((\mathfrak{o}_K)^N \cap W) : ((\mathfrak{a})^N \cap W)] = \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n$
$$\left[\left((\mathfrak{o}_K)^N \cap W\right) : \left((\mathfrak{a})^N \cap W\right)\right] \overset{2.15}{=} \prod_\nu \left[\left((\mathfrak{o}_K)^N \cap W\right)_\nu : \left((\mathfrak{a})^N \cap W\right)_\nu\right]$$

$$\overset{\text{3.Schritt}}{=} \prod_{\nu} [(\mathfrak{o}_K)_\nu : (\mathfrak{a})_\nu]^n \overset{2.15}{=} [\mathfrak{o}_K : \mathfrak{a}]^n = \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n,$$

wobei ν über alle nicht archimedischen Elemente aus M_K läuft. Für die letzte Gleichung siehe [Ko], Satz 3.5.1. □

Theorem 2.17. *Unter den Voraussetzungen von 2.14 gilt:*

$$2^{ns} \operatorname{vol}(\Lambda_\infty) = D_{K/\mathbb{Q}}^{n/2} \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(W)^d \, \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n.$$

Beweis: Sowohl $W \cap \mathfrak{o}_K^N$ als auch $W \cap (\mathfrak{a})^N$ bilden ein K-Gitter in K^N. Nun gilt ([Eb], Section 1.1):

$$\frac{\operatorname{vol}(\Phi(W \cap (\mathfrak{a})^N))}{\operatorname{vol}(\Phi(W \cap \mathfrak{o}_K^N))} = \left[\Phi(W \cap \mathfrak{o}_K^N) : \Phi(W \cap (\mathfrak{a})^N)\right].$$

Jetzt wird der Index unter Φ nicht verändert. Also gilt:

$$\left[\Phi(W \cap \mathfrak{o}_K^N) : \Phi(W \cap (\mathfrak{a})^N)\right] = \left[W \cap \mathfrak{o}_K^N : W \cap (\mathfrak{a})^N\right] \overset{2.16}{=} \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n.$$

Zusammen ergibt das:

$$\operatorname{vol}(\Phi(W \cap \mathfrak{o}_K^N)) = \frac{\operatorname{vol}(\Phi(W \cap (\mathfrak{a})^N))}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n}.$$

Dies setzten wir in das Ergebnis aus Theorem 2.13 ein und erhalten:

$$2^{ns} \operatorname{vol}(\Lambda_\infty) = D_{K/\mathbb{Q}}^{n/2} \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(W)^d \, \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n,$$

wobei $\Lambda_\infty = \Phi(W \cap (\mathfrak{a})^N)$. □

3 Verallgemeinerter Satz von Schanuel für $K = \mathbb{Q}$

Die Verallgemeinerung des Satzes von Schanuel liefert uns eine Abschätzung für die Anzahl $\mathrm{N}_{\mathrm{Ar}}(L, T)$ der Punkte in einem Unterraum W von K^N, die eine gegebene Höhe T nicht überschreiten. Dabei legen wir besonderen Wert auf den Einfluss, den der Unterraum auf die Abschätzung ausübt. Die detailierte Untersuchung des Spezialfalls $K = \mathbb{Q}$ soll der Motivation des allgemeinen Falles und dem besseren Verständnis des Lesers dienen. Der Beweis gliedert sich in drei Schritte: Als erstes wird die Anzahl $\mathrm{N}(W, T)$ der Lösungen in $W \cap \mathbb{Z}^N$ mit Hilfe eines Lemmas aus der Geometrie der Zahlen abgeschätzt. Im zweiten Schritt rechnen wir dieses Resultat mit der Möbiusschen Umkehrformel um und erhalten die Anzahl $\mathrm{N}^*(W; T)$ der primitiven Lösungen. Dann ist die gesuchte Anzahl $\mathrm{N}_{\mathrm{Ar}}(L, T)$ gleich $\mathrm{N}^*(W; T)$ dividiert durch 2. Im dritten Schritt setzen wir die vorherigen Ergebnisse ein und müssen als letztes noch die Fehlerabschätzung mit Hilfe des Integralkriteriums auf die gewünschte Form bringen. Ein kurzer Beweis dieses Spezialfalls ist in [BG], Theorem 11.10.14 zu finden.

3.1. Seien $n, N \in \mathbb{N}$ und W bezeichne einen n-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{Q}^N$. Die natürliche Einbettung $\Phi : \mathbb{Q}^N \to \mathbb{R}^N$ bildet das $\mathbb{Q}$-Gitter $\Lambda := W \cap \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}^N = W \cap \mathbb{Z}^N$ in ein n-dimensionales $\mathbb{R}$-Gitter Λ_∞ im Abschluss von $\Phi(W)$ in $\mathbb{R}^N$ ab. Die Länge des bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^N$ kürzesten Gittervektors in $\Lambda_\infty \setminus \{0^N\}$ nennen wir λ_1. Weiter bezeichne $\mathrm{vol}(\Lambda_\infty)$ das Volumen der Fundamentalmasche von $\overline{\Phi(W)}/\Lambda_\infty$ bezüglich des relativen Lebesguemaßes.

Theorem 3.2. *Mit den obigen Vereinbarungen und $n \geq 2$ sei L der durch W induzierte projektive lineare Unterraum von $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N-1}$. Dann gilt für $T \geq 1$ die folgende Abschätzung:*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Ar}}(L, T) = \frac{\alpha(n) T^n}{2\zeta(n)\, \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)} + \begin{cases} O\left(\frac{T}{\lambda_1}\left(1 + \log^+\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)\right)\right) & \textit{für } n = 2 \\ O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^{n-1}\right) & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n abhängen kann.

Zum Beweis des Theorems benötigen wir den folgenden Spezialfall von Theorem 2.13 und ein Lemma aus der Geometrie der Zahlen, welches wir ohne Beweis zitieren ([BG], Lemma 11.10.15).

Lemma 3.3. Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$\mathrm{vol}(\Lambda_\infty) = \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(W).$$

Lemma 3.4. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte, messbare Menge mit Lipschitz-parametrisierbarem Rand, Λ' ein Gitter in $\mathbb{R}^N$ und λ_1 wie oben. Für $T > 0$ gilt für die Anzahl $N(\Lambda', T)$ der Gitterpunkte in $T\Omega$:

$$\mathrm{N}(\Lambda', T) = \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(\Lambda')} T^n + O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^{n-1}\right) + 1,$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n und Ω abhängen kann, aber nicht von Λ abhängt.

Beweis von Theorem 3.2: Sei $\mathrm{N}(W, T)$ die Anzahl der $X = (x_1, \ldots, x_N) \in W \cap \mathbb{Z}^N$ mit $|x_1|^2 + \ldots + |x_N|^2 \leq T^2$ und Ω die Schnittmenge von $\overline{W}$ mit der Einheitskugel in $\mathbb{R}^N$. Dann folgt mit Lemma 3.4 für $\Lambda' = \Lambda_\infty$ und Lemma 3.3:

$$\mathrm{N}(W, T) = \frac{\alpha(n)}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)} T^n + O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^{n-1}\right) + 1, \tag{2}$$

wobei $\alpha(n)$ das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist (siehe 1.1). Beachte, dass die implizite Konstante unabhängig von W ist, da alle Ω isometrisch sind. Sei $\mathrm{N}^*(W, T)$ die Anzahl der primitiven Lösungen, das heißt $X \in \mathbb{Z}^N \cap W$ mit $|x_1|^2 + \ldots + |x_N|^2 \leq T^2$ und $\mathrm{ggT}(x_1, \ldots, x_N) = 1$. Offensichtlich gilt:

$$\mathrm{N}(W, T) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}^*\left(W, \frac{T}{k}\right)$$

und mit der Möbiussche Umkehrformel (siehe Lemma 1.4) folgt dann:

$$\mathrm{N}^*(W, T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left(\mathrm{N}\left(W, \frac{T}{k}\right) - 1\right), \tag{3}$$

wobei μ die Möbiussche Funktion (siehe 1.3) ist. Falls $k > \frac{T}{\lambda_1}$, ist $\mathrm{N}(W, \frac{T}{k}) = 1$, da wir in diesem Fall nur den Nullvektor zählen. Wegen $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ müssen wir nur die Hälfte der primitiven Lösungen für $\mathrm{N}_{\mathrm{Ar}}(L, T)$ zählen. Somit folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{\mathrm{Ar}}(L, T) &= \frac{1}{2} \mathrm{N}^*(W, T) \\ &\overset{(3)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left(\mathrm{N}\left(W, \frac{T}{k}\right) - 1\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor} \mu(k) \left(\mathrm{N}\left(W, \frac{T}{k} \right) - 1 \right) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor} \mu(k) \left(\frac{\alpha(n) T^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L) k^n} + O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1 k} \right)^{n-1} \right) + 1 - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor} \mu(k) \frac{\alpha(n) T^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L) k^n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor} \mu(k) O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1 k} \right)^{n-1} \right) \\
&= \frac{\alpha(n) T^n}{2\, \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) k^{-n} - \sum_{k=\left\lceil \frac{T}{\lambda_1} \right\rceil}^{\infty} \mu(k) k^{-n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor} \mu(k) O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1 k} \right)^{n-1} \right) \\
&= \frac{\alpha(n) T^n}{2\, \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) k^{-n} - \sum_{k=\left\lceil \frac{T}{\lambda_1} \right\rceil}^{\infty} \mu(k) k^{-n} \right) + O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor} k^{-n+1} \right).
\end{aligned}
$$

Der erste Summand ist der Hauptteil der rechten Seite des Theorems 3.2, denn nach Lemma 1.6 (c) gilt:

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) k^{-n} = \frac{1}{\zeta(n)}.
$$

Der zweite Summand trägt zum Fehler bei, weil aus dem Integralkriterium für Reihen folgt, dass

$$
\sum_{k=\left\lceil \frac{T}{\lambda_1} \right\rceil}^{\infty} k^{-n} = O\left(\left\lceil \frac{T}{\lambda_1} \right\rceil^{-n+1} \right) \leq O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1} \right)^{-n+1} \right).
$$

Der dritte Summand gibt uns den gewünschten Fehlerterm, denn analog folgt:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{T}{\lambda_1} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor} k^{-n+1} &= \begin{cases} O\left(\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor \left(1 + \log^+ \left(\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor \right) \right) \right) & \text{für } n = 2 \\ O\left(\left(\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor \right)^{n-1} \right) & \text{sonst} \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} O\left(\frac{T}{\lambda_1} \left(1 + \log^+ \left(\frac{T}{\lambda_1} \right) \right) \right) & \text{für } n = 2 \\ O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1} \right)^{n-1} \right) & \text{sonst} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung gilt, weil $\left\lfloor \frac{T}{\lambda_1} \right\rfloor^{n-1} \leq \left(\frac{T}{\lambda_1} \right)^{n-1}$ und der Logarithmus streng monoton wachsend ist. □

4 Der Divisorensatz von Schanuel

Die Struktur unseres Beweises orientiert sich an der des Beweises von Schanuel (siehe [S]). Im Gegensatz zu Schanuel betrachten wir die relative Situation für einen n-dimensionalen Unterraum W in K^N und legen besonderen Wert auf den Einfluss, den der Unterraum auf die Abschätzung ausübt. Auch verwendet Schanuel die Maximums-Norm, um die Höhe eines Punktes zu messen. Unser Ziel ist es, das Resultat in der Arakelov Geometrie zu nutzen. Damit dies möglich ist, ist eine Anpassung der Höhe auf die L^2-Norm und damit die Verwendung der Arakelov Höhe nötig. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist der Divisorensatz von Schanuel (4.4), in dem die Anzahl ganzer Ideale $\mathfrak{a}$ mit Norm $\leq T$ durch

$$\lambda^W((\mathfrak{a},T)) = c_n\|(\mathfrak{a},T)\|^n + O\left(\left(\frac{\|(\mathfrak{a},T)\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-1/d}\right) + 1,$$

abgeschätzt wird. Dabei ist λ_1 durch W bestimmt und c_n eine von n und K abhängige Konstante. Um nun dieses Resultat zu beweisen, reduzieren wir die Aussage auf das Problem, die Anzahl von Gitterpunkten in einem bestimmten beschränkten Gebiet im euklidischen Raum W zu zählen. Hierbei wird die relative Situation durch eine verfeinerte Anwendung der Geometrie der Zahlen in Theorem 4.21 berücksichtigt. Um dieses Theorem anwenden zu können, ist die Parametrisierbarkeit des Randes des oben genannten Gebietes zu prüfen. Dieses geschieht anhand mehrerer technischer Lemmata und ist für das bessere Verständnis in das nächste Kapitel ausgegliedert. Um nun nach der Anwendung der Geometrie der Zahlen ein konkretes Resultat zu erhalten, muß noch das Lebesguemaß des Gebiets in W berechnet werden. Dies geschieht in Proposition 4.23 und ist verglichen mit Schanuel eine der entscheidenen Änderungen.

4.1. Ein *Divisor* $\mathfrak{d}$ auf K ist ein Paar $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$, wobei $\mathfrak{a}$ ein gebrochenes Ideal in K (ungleich dem Nullideal) und T eine positive reelle Zahl ist. Die Divisoren bilden mit der komponentenweisen Multiplikation eine Gruppe D und sind partiell geordnet durch $(\mathfrak{a},T) \leq (\mathfrak{a}',T') :\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}', T \leq T'$. Die *Norm* $\|\mathfrak{d}\|$ eines Divisors $\mathfrak{d}$ ist gleich $T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-1}$, wobei $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ die übliche Norm eines gebrochenen Ideals ist. S_∞ bezeichnet die Menge der archimedischen Absolutbeträge auf K, das heißt die Menge der Fortsetzungen des gewöhnlichen Absolutbetrages von $\mathbb{Q}$. Für $\nu \in S_\infty$ bezeichnet N_ν den Grad der Vervollständigung K_ν über $\mathbb{R}$. Um Exponenten zu vermeiden, setzen wir $\|x\|_\nu := |x|_\nu^{N_\nu}$, wobei $x \in K_\nu$.

4.2. Jedem Punkt $X = (x_1, \ldots, x_N) \in K^N \setminus \{0^N\}$ ordnen wir durch

$$\mathfrak{d}_X = ([X], H_\infty X)$$

einen Divisor zu, wobei $[X]$ das von den Komponenten von X erzeugte Ideal ist und

$$H_\infty X := \prod_{\nu \in S_\infty} \|X\|_{L^2_\nu} := \prod_{\nu \in S_\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{N_\nu}.$$

Weiter folgt mit [L3], Section 3.1:

$$\|\mathfrak{d}_X\| = \frac{H_\infty X}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}([X])} = \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X)^d.$$

Damit haben alle Hauptdivisoren Norm 1 und $\|\mathfrak{d}\|$ hängt nur von der Klasse von $\mathfrak{d}$ modulo den Hauptdivisoren ab.
Für $N = 1$ ist die Abbildung $K^* \to D$ mit $x \mapsto \mathfrak{d}_x$ ein Homomorphismus. Sein Bild ist die Menge der Hauptdivisoren und sein Kern die Gruppe der Einheiten in K, die wir mit U bezeichnen.

4.3. Sei W ein n-dimensionaler Unterrraum des K^N und L der durch W induzierte projektive lineare Unterraum. Die Menge der $X \in W \setminus \{0^N\}$, die $\mathfrak{d}_X \leq \mathfrak{d}$ für einen gegebenen Divisor $\mathfrak{d}$ erfüllen, ist stabil unter komponentenweiser Multiplikation mit Einheiten. Wir bezeichnen die Menge dieser Orbits modulo U mit $L^W(\mathfrak{d})$. Weiter sei $\lambda^W(\mathfrak{d})$ die Kardinalität von $L^W(\mathfrak{d})$. Dann hängt $\lambda^W(\mathfrak{d})$ nur von der Klasse von $\mathfrak{d}$ ab, denn die Multiplikation mit $x \in K^*$ induziert eine Bijektion $L^W(\mathfrak{d}) \to L^W(\mathfrak{d}_x \mathfrak{d})$.

Divisorensatz von Schanuel 4.4.

$$\lambda^W(\mathfrak{d}) = c_n \|\mathfrak{d}\|^n + O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d} \right)^{n - 1/d} \right) + 1,$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n und K abhängen kann und c_n gegeben ist durch

$$c_n = \frac{R}{\omega} \mathrm{D}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}^{-n/2} n^{r+s-1} \alpha(n)^r \left\{2^n \alpha(2n)\right\}^s \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^{-d}.$$

Wir verwenden die übliche Notation:
r bzw. s ist die Anzahl der $\nu \in S_\infty$ mit $N_\nu = 1$ bzw. $N_\nu = 2$.
$\mathrm{D}_{K/\mathbb{Q}}$ = *Absolutbetrag der Diskriminante von K*
R = *Regulator von K*

ω = *Ordnung der Gruppe der Einheitswurzeln in* K
d = *Grad von* K *über* $\mathbb{Q}$
$\alpha(n)$ = *Volumen der Einheitskugel in* $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)$ = *Arakelov Höhe von* L
λ_1 = *Länge des kürzesten Gittervektors in* $W \cap \mathfrak{o}_K^N$

4.5. Für den Beweis von Theorem 4.4 machen wir die folgenden Vorarbeiten: Sei $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_h$ ein Repräsentantensystem für die Idealklassen. Dann kann jeder Divisor durch Multiplikation mit einem Hauptdivisor auf die Form $(\mathfrak{a}_i, T)$ gebracht werden, wobei $i \in \{1, \dots, h\}$. Da $\lambda^W(\mathfrak{d})$ und $\|\mathfrak{d}\|$ nur von der Idealklasse von $\mathfrak{d}$ und nicht vom Repräsentantensystem abhängen (siehe 4.2 und 4.3), genügt es, die folgende Aussage zu verifizieren, um Theorem 4.4 zu beweisen. Für ein festes ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ gilt:

$$\lambda^W(\mathfrak{a}, T) = c_n \left(\frac{T}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})} \right)^n + O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1^d} \right)^{n-1/d} \right) + 1.$$

Dazu reduzieren wir die Aussage auf das Problem, die Anzahl von Gitterpunkten in einem bestimmten beschränkten Gebiet im euklidischen Raum $\mathbb{R}^{dN}$ zu zählen.

Vereinbarungen 4.6. Für den Rest dieses Kapitel gelten die folgenden Vereinbarungen: K, N und $\mathfrak{a}$ sind fest. $(\mathfrak{a})^N$ bezeichnet die Menge der N-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{a}$. Der Index ν läuft über S_∞ und der Index i über $\{1, \dots, N\}$. Wir identifizieren K_ν mit $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, was nur im komplexen Fall mehrdeutig ist. Dann wählen wir eine Identifikation fest. Damit erhalten wir auch kanonische Abbildungen $\sigma_\nu : K \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Immer wenn es hilfreich ist, identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ auf die kanonische Weise. U ist die Gruppe der Einheiten von K, und V ist die Gruppe der Einheitswurzeln von K. Wir erinnern daran, dass V eine Untergruppe von U ist.

Definition 4.7. Seien A eine Menge, G eine auf A operierende abelsche Gruppe und H eine Untergruppe von G.

(a) G heißt *effektiv* mod H (auf A), wenn gilt: $\forall g \in G\ \forall a \in A : ga = a \Rightarrow g \in H$

(b) Eine Teilmenge S von A heißt *fundamental* mod H (in A), wenn gilt:

  (i) S ist H-stabil, das heißt $\forall h \in H\ \forall s \in S \Rightarrow hs \in S$.

  (ii) $GS = A$.

  (iii) $g \notin H \Rightarrow gS \cap S = \emptyset$.

(c) Sei A' eine weitere Menge, auf der G operiert. Eine Abbildung $\Phi : A \to A'$ heißt *G-Abbildung*, wenn $\forall g \in G\ \forall a \in A : \Phi(ga) = g\Phi(a)$.

Lemma 4.8. Sei $\Phi : A \to A'$ eine G-Abbildung und H eine Untergruppe von G. Dann gilt:

(a) G effektiv mod H auf $A' \Rightarrow G$ effektiv mod H auf A.

(b) $\Delta \subset A'$ fundamental mod H in $A' \Rightarrow \Phi^{-1}(\Delta)$ fundamental mod H in A.

Beweis:

(a) Seien $g \in G$ und $a \in A$ so, dass $ga = a$. Zu zeigen ist, dass dann $g \in H$. Nun gilt:

$$ga = a \overset{\text{Anwenden von } \Phi}{\Longrightarrow} \Phi(ga) = \Phi(a) \overset{\Phi\ G-\text{Abbildung}}{\Longrightarrow} g\Phi(a) = \Phi(a).$$

Da $\Phi(a) \in A'$ und nach Voraussetzung G effektiv mod H auf A', folgt $g \in H$.

(b) Um zu zeigen, dass $\Phi^{-1}(\Delta)$ fundamental mod H in A, müssen wir die drei Bedingungen aus Definition 4.7 (b) prüfen:

1. Seien $h \in H$ und $s \in \Phi^{-1}(\Delta)$. Zu zeigen ist $hs \in \Phi^{-1}(\Delta)$. Offensichtlich gilt:
$$hs \in \Phi^{-1}(\Delta) \overset{\Phi(\Phi^{-1}(\Delta))=\Delta}{\Longleftrightarrow} \Phi(hs) \in \Delta.$$
Also ist zu zeigen, dass $\Phi(hs) \in \Delta$. Da Φ eine G-Abbildung und H eine Untergruppe von G ist, gilt $\Phi(hs) = h\Phi(s)$. Weil wir $s \in \Phi^{-1}(\Delta)$ gewählt haben, ist $\Phi(s) \in \Delta$. Nach Voraussetzung ist $\Delta \subset A'$ fundamental mod H in A', also folgt
$$\Phi(hs) = h\underbrace{\Phi(s)}_{\in\Delta} \in \Delta.$$

2. Zu zeigen ist $G\Phi^{-1}(\Delta) = A$.

„$\subset$“ $\Phi^{-1}(\Delta) \subset A$ nach Definition von Φ, und G operiert auf A. Somit gilt: $G\Phi^{-1}(\Delta) \subset A$

„$\supset$“ Sei $a \in A$, also $\Phi(a) \in A'$. Da $A' = G\Delta$ nach Voraussetzung, existieren $g \in G$ und $s \in \Delta$ so, dass $\Phi(a) = gs$. Somit $a \in \Phi^{-1}(gs)$.
Behauptung: $\Phi^{-1}(gs) = g\Phi^{-1}(s)$.
$\ulcorner$ $b \in \Phi^{-1}(gs) \Leftrightarrow \Phi(b) = gs$
$\Leftrightarrow \Phi(g^{-1}b) = g^{-1}\Phi(b) = g^{-1}gs = s$

$\Leftrightarrow g^{-1}b \in \Phi^{-1}(s)$
$\Leftrightarrow b = g(g^{-1}b) \in g\Phi^{-1}(s)$ ⌟
Somit folgt jetzt $a \in g\Phi^{-1}(s) \subseteq G\Phi^{-1}(\Delta)$.

3. Zu zeigen ist $g\Phi^{-1}(\Delta) \cap \Phi^{-1}(\Delta) = \emptyset$ für $g \notin H$.
   Annahme: $\exists g \notin H$ (das heißt $g \in G \setminus H$) so, dass $g\Phi^{-1}(\Delta) \cap \Phi^{-1}(\Delta) \neq \emptyset$.
   Sei also $s \in g\Phi^{-1}(\Delta) \cap \Phi^{-1}(\Delta)$
   $\Rightarrow \Phi(s) \in \Phi(g\Phi^{-1}(\Delta) \cap \Phi^{-1}(\Delta))$
   $\Rightarrow \Phi(s) \in \Phi(g\Phi^{-1}(\Delta)) \cap \Phi(\Phi^{-1}(\Delta))$
   $\Rightarrow \Phi(s) \in g\Phi(\Phi^{-1}(\Delta)) \cap \Phi(\Phi^{-1}(\Delta))$ (da Φ G-Abbildung)
   $\Rightarrow \Phi(s) \in g\Delta \cap \Delta$
   $\Rightarrow g\Delta \cap \Delta \neq \emptyset$ für ein $g \notin H$.
   Dies ist ein Widerspruch zu Δ fundamental mod H in A'. □

4.9. Jeder Homomorphismus $\alpha : G \to A$ induziert durch $ga = \alpha(g)a$ eine Operation von G auf A, wobei A eine kommutative Halbgruppe mit Eins ist. Weiter ist G effektiv mod $H \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(\alpha) \subseteq H$. Wenn $\Phi : A \to A'$ ein Halbgruppenhomomorphismus mit $\Phi(\alpha(g)) = \alpha'(g)\ \forall g \in G$ ist, dann ist Φ eine G-Abbildung. In unserer Anwendung ist G immer U, die Gruppe der Einheiten von K, und H die Untergruppe V, die Gruppe der Einheitswurzeln von K.
Durch $x \mapsto (\sigma_\nu(x))$ betten wir K in $\prod_\nu K_\nu$ ein. Mit Hilfe von $\Phi : K^N \to \prod_\nu K_\nu^N$ durch $X \mapsto (\sigma_\nu(X)) := ((\sigma_\nu(x_i))_{i=1,\ldots,N})$ und $\Psi : K \to K^N$ durch $x \mapsto (x, \ldots, x)$ können wir U mit

$$\Phi \circ \Psi|_U \to \prod_\nu K_\nu^N, \quad u \mapsto (\sigma_\nu(u)) := ((\sigma_\nu(x))_{i=1,\ldots,N})$$

diagonal in $\prod_\nu K_\nu^N$ einbetten. U operiert auf $\prod_\nu K_\nu^N$ durch $U \times \prod_\nu K_\nu^N \to \prod_\nu K_\nu^N$ mit $(u, (X_\nu)_{\nu \in S_\infty}) \mapsto (\sigma_\nu(u)X_\nu)_{\nu \in S_\infty}$. Wir wollen eine fundamentale Menge mod V für die U-stabile Teilmenge $\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ auswählen. Dazu benötigen wir das folgende Theorem aus [ST], Chapter 12.4, Theorem 12.5, das wir hier ohne Beweis wiedergeben wollen:

Theorem 4.10. *Die Abbildung $U \to \prod_\nu \mathbb{R}_\nu = \mathbb{R}^{r+s}$ mit $u \mapsto (\log \|u\|_\nu)_{\nu \in S_\infty}$ ist ein Homomorphismus mit Kern V. Das Bild ist ein Gitter vom maximalen Rang $r+s-1$ in der Hyperebene H, die durch $\sum_\nu y_\nu = 0$ definiert ist.*

4.11. Sei ab jetzt W_ν die Vervollständigung von W. Wir setzen dann $\overline{W} = \prod_\nu W_\nu$. Definiere

$$\eta : \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right) \to \prod_\nu \mathbb{R}_\nu, \quad \eta = (\eta_\nu)_{\nu \in S_\infty},$$

wobei $\eta_\nu : W_\nu \setminus \{0^N\} \to \mathbb{R}_\nu = \mathbb{R}$ mit $\eta_\nu(X) = \log(\|X\|_{L^2_\nu})$. Nun operiert U auf $\mathbb{R}_\nu$ durch $U \times \mathbb{R}_\nu \to \mathbb{R}_\nu$, $(u, x) \mapsto \log(\|u\|_\nu) + x$. Damit folgt direkt, dass η eine U-Abbildung ist. Sei weiter $\mathrm{pr} : \prod_\nu \mathbb{R}_\nu \to H$ die Projektion entlang des Vektors $(N_\nu)_{\nu \in S_\infty}$. Genauer gilt:

$$(\mathrm{pr}(Y))_\nu = y_\nu - \left(\frac{1}{d} \sum_{\omega \in S_\infty} y_\omega \right) N_\nu .$$

Aus der Formel $\sum_\nu N_\nu = d$ folgt, dass das Bild tatsächlich H ist. Auch diese Abbildung ist eine U-Abbildung.

Lemma 4.12. Sei F fundamental mod V in H.

(a) $\Delta := (\mathrm{pr} \circ \eta)^{-1}(F)$ ist fundamental mod V in $\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$.

(b) U ist effektiv auf $\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$.

Beweis:

(a) Hier lässt sich direkt Lemma 4.8 (b) anwenden. Dazu bemerken wir, dass $\mathrm{pr} \circ \eta$ als eine Verkettung von U-Abbildungen (siehe 4.11) auch eine U-Abbildung ist. Die Bezeichnungen entsprechen sich auf folgende Weise:

Lemma 4.8	G	H	A	A'	Δ	Φ
Lemma 4.12	U	V	$\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$	H	F	$\mathrm{pr} \circ \eta$

(b) Sei $u \in U$ und $(a_\nu)_{\nu \in S_\infty} = (a_{\nu,1}, \dots, a_{\nu,N})_{\nu \in S_\infty} \in \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ mit $u(a_\nu) = (a_\nu)$.
Zu zeigen ist $u = 1$.
Es gilt $u(a_\nu) = (\sigma_\nu(u) a_{\nu,1}, \dots, \sigma_\nu(u) a_{\nu,N}) = (a_{\nu,1}, \dots, a_{\nu,N}) = (a_\nu)$ und damit $\sigma_\nu(u) = 1 \ \forall \nu \in S_\infty$. Weil $(a_\nu) \neq 0^N$, folgt $u = 1$. □

4.13. Sei $\overline{U_1}, \dots, \overline{U_{r+s-1}}$ eine Basis des Bildes von U in H. Sie ist dann auch eine $\mathbb{R}$-Basis von H. Sei weiter $\tau_1, \dots, \tau_{r+s-1}$ die duale Basis, das heißt $\tau_j : H \to \mathbb{R}$ ist die lineare Funktion mit $\tau_j(\overline{U_k}) = \delta_{jk} \ \forall 1 \leq j, k \leq r + s - 1$. Hierbei ist δ_{jk} das Kronecker-Delta. Dann ist F die Menge der $Y \in H$ so, dass $0 \leq \tau_j(Y) < 1$ für $j = 1, \dots, r + s - 1$. Da der Kern der Abbildung aus Theorem 4.10 gleich V ist, ist F fundamental mod V. Damit bildet F eine Fundamentalmasche für das Gitter aus Theorem 4.10. Ab jetzt soll zu diesem F die Menge Δ wie in Lemma 4.12 (a)

definiert sein.
Sei

$$R(T) := \{(Z_\nu) \in \overline{W} | \prod_\nu \|Z_\nu\|_{L^2_\nu} \leq T\}.$$

Offensichtlich ist $R(T)$ auch U-stabil, da

$$\prod_\nu \|\sigma_\nu(u) Z_\nu\|_{L^2_\nu} = \prod_\nu \|\sigma_\nu(u)\|_\nu \prod_\nu \|Z_\nu\|_{L^2_\nu} = \prod_\nu \|Z_\nu\|_{L^2_\nu}$$

nach der Produktformel. Setze

$$\Delta(T) := \Delta \cap R(T) = (\mathrm{pr} \circ \eta)^{-1}(F) \cap R(T).$$

Unser Ziel ist es nun, die U-Orbits in $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T)$ zu zählen.

Hilfssatz 4.14. $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T) \cap \Delta$ ist fundamental $\bmod V$ in $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T)$.

Beweis: Sei $\Phi : ((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T) \hookrightarrow \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ die Inklusionsabbildung. Damit ist Φ nach Konstruktion eine U-Abbildung. Nun folgt mit den Lemmata 4.8 (b) und 4.12 (a) , dass $\Phi^{-1}(\Delta) = ((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T) \cap \Delta$ fundamental $\bmod V$ in $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T)$ ist. □

Bemerkung 4.15. Der Beweis ist analog für jede U-stabile Teilmenge von W.

Hilfssatz 4.16. $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T) \cap \Delta = (\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T)$

Beweis: Es gilt:

$$((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T) \cap \Delta \overset{\text{Def.}}{=} ((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap \Delta(T) = (\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T).$$

Die letzte Gleichung folgt, da $0^N \notin \Delta$, also $0^N \notin \Delta(T)$. □

Hilfssatz 4.17. Die Anzahl der U-Orbits in $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T)$ ist gleich der Anzahl der V-Orbits in $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T) \cap \Delta$.

Beweis: Setze $M := ((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T)$. Suche nun eine Bijektion zwischen der Menge $\{U\text{-Orbits in } M\}$ und der Menge $\{V\text{-Orbits in } M \cap \Delta\}$.
Behauptung: $UX \mapsto UX \cap \Delta$ liefert die gewünschte Abbildung.

1. Wohldefiniertheit:
   Zu zeigen ist, dass $UX \cap \Delta$ ein V-Orbit in $M \cap \Delta$ ist.

- $UX \cap \Delta$ ist als Schnitt zweier V-stabiler Mengen selbst V-stabil:
  UX ist V-stabil, da $V \subset U$ und UX als U-Orbit U-stabil. Δ ist V-stabil, da nach Lemma 4.12 (a) Δ fundamental mod V.
- $UX \cap \Delta \neq \emptyset$:
  Sei $X \in M \subset \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$. Nun wissen wir, dass Δ fundamental mod V in $\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ (siehe Lemma 4.12 (a)). Also existieren $v \in V \subset U$ und $Z \in \Delta$ mit $X = vZ$. Weil v eine Einheitswurzel ist, folgt $\Delta \ni Z = v^{-1}X \in UX$. Somit gilt $Z \in UX \cap \Delta$. Also $UX \cap \Delta \neq \emptyset$.
- Bleibt zu zeigen, dass $UX \cap \Delta$ ein V-Orbit ist. Das heißt $\exists\ Y \in UX \cap \Delta$ so, dass $\forall\ Z \in UX \cap \Delta$ folgt: $\exists\ v \in V$ mit $Z = vY$.
  Wir wählen ein $Y \in UX \cap \Delta$. Dann gilt für alle $Z \in UX \cap \Delta$, da UX ein U-Orbit ist, dass $u \in U$ existiert mit $Z = uY$. Nach Hilfssatz 4.14 ist $M \cap \Delta$ fundamental mod V in M, also folgt $u \in V$ wie gewünscht.

Somit ist $UX \cap \Delta$ ein V-Orbit.

2. Injektivität:
   Die Menge M ist durch eine disjunkte Vereinigung von U-Orbits darstellbar. ([Bo], Kapitel 5.5, Bemerkung 4.) Somit folgt für $UX, UY \in \{U\text{-Orbits in } M\}$ mit $UX \cap \Delta = UY \cap \Delta$, da die Mengen nicht leer sind (siehe Wohldefiniertheit), dass $UX \cap UY \neq \emptyset$. Weil die Vereinigung der U-Orbits disjunkt ist, folgt $UX = UY$.

3. Surjektivität:
   Die U-Orbits überdecken die Menge M und damit überdecken die U-Orbits geschnitten mit der Menge Δ die Menge $M \cap \Delta$. □

Hilfssatz 4.18. V ist effektiv auf $(\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T)$. Damit folgt, dass jeder Orbit unter V genau $|V| =: \omega$ Punkte enthält.

Beweis:

1. V operiert effektiv auf K und damit auch auf K^N. Daraus folgt die erste Behauptung.

2. Aus [Bo], Kapitel 5.1, Bemerkung 5 folgt sofort, dass jeder V-Orbit in $(\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T)$ genau $|V| = \omega$ viele Punkte hat. □

Proposition 4.19. $\omega\lambda^W(\mathfrak{a}, T)$ ist die Anzahl der Punkte des Gitters $(\mathfrak{a})^N$ in $\Delta(T)$, das heißt:

$$\left|(\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T)\right| = \omega\lambda^W(\mathfrak{a}, T).$$

Beweis: Nach Hilfssatz 4.18 enhält jeder V-Orbit in $(\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T)$ genau $|V| = \omega$ Punkte. Also ist zu zeigen, dass $\lambda^W(\mathfrak{a}, T)$ die Anzahl der V-Orbits in $(\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T)$ ist. Weiter folgt mit den Hilfssätzen 4.16 und 4.17, dass diese Zahl gleich der Anzahl der U-Orbits in $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\} \cap R(T))$ ist. Somit müssen wir zeigen, dass $\lambda^W(\mathfrak{a}, T)$ die Anzahl der U-Orbits in $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0\}) \cap R(T)$ ist. Wir erinnern daran, dass $\lambda^W(\mathfrak{a}, T)$ die Anzahl der U-Orbits in $W \setminus \{0^N\}$ ist, die einen Vektor x enthalten mit $\mathfrak{d}_x \leq \mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$ (siehe 4.3). Nun ist aber die Menge der U-Orbits in $W \setminus \{0^N\}$, deren Vektoren X die Bedingung $\mathfrak{d}_X \leq \mathfrak{d}$ erfüllen, gleich der Menge der U-Orbits in $M := ((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T)$.
Behauptung: $UX = UX \cap M$.
$\forall\, Y \in UX$ gilt $\mathfrak{d}_Y \leq \mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$, das heißt $[Y] \subseteq \mathfrak{a}$ und $H_\infty Y \leq T^d$, was äquivalent ist zu $Y \in (\mathfrak{a})^N$ und $Y \in R(T)$, also $Y \in M$. Damit folgt $UX \cap M = UX$. □

Lemma 4.20. Es gilt:

(a) $t\Delta = \Delta$ für $t \in \mathbb{R}^*$.

(b) $R(T) = T^{1/d} R(1)$ für $T > 0$.

(c) $\Delta(T) = T^{1/d}\Delta(1)$ für $T > 0$.

Beweis:

(a) Nach Definition ist $\Delta = (\mathrm{pr} \circ \eta)^{-1}(F)$. Sei $Z \in \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ und $t \in \mathbb{R}^*$. Es gilt $\eta(tZ) = \left(\log\left(\|tZ\|_{L^2_\nu}\right)\right) = \left(\log\left(|t|^{N_\nu} \cdot \|Z\|_{L^2_\nu}\right)\right) = \left(\log\left(|t|^{N_\nu}\right) + \eta_\nu(Z)\right) = \log(|t|)(N_\nu) + \eta(Z)$. Da pr linear und $\mathrm{pr}(\log(|t|)(N_\nu)) = 0$, folgt $\mathrm{pr}(\eta(tZ)) = \mathrm{pr}(\eta(Z))$ und damit die Behauptung.

(b) Sei $Z \in \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ und $t \in \mathbb{R}^*$. Setze $\rho(Z) = \prod_\nu \|Z\|_{L^2_\nu}$. Dann gilt:

$$\rho(tZ) = \prod_\nu \|tZ\|_{L^2_\nu} = \prod_\nu |t|^{N_\nu} \cdot \prod_\nu \|Z\|_{L^2_\nu}$$

$$= |t|^{\sum_\nu N_\nu} \prod_\nu \|Z\|_{L^2_\nu} = |t|^d \prod_\nu \|Z\|_{L^2_\nu} = |t|^d \rho(Z).$$

Nun folgt mit der Definition von $R(T)$ und $t = T^{1/d}$ die Behauptung.

(c) $\Delta(T) \overset{\text{Def.}}{=} \Delta \cap R(T) \overset{(a)}{=} T^{1/d}\Delta \cap R(T) \overset{(b)}{=} T^{1/d}\Delta \cap T^{1/d}R(1) = T^{1/d}(\Delta \cap R(1)) = T^{1/d}\Delta(1)$ □

Das nun folgende Theorem aus der Geometrie der Zahlen ermöglicht uns, die Anzahl der Gitterpunkte in $\Delta(T)$ abzuschätzen. Wir geben dieses Resultat aus [BG], Theorem 11.10.15 hier ohne Beweis wieder.

Theorem 4.21. *Sei Ω eine beschränkte messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ mit Lipschitz-parametrisierbarem Rand. Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{R}^k$ und sei λ_1 die Länge des kürzesten Gittervektors (ungleich dem Nullvektor). Für $t > 0$ ist die Anzahl der Gitterpunkte in $t\Omega$ gegeben durch*

$$|\Lambda \cap t\Omega| = t^k \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(\Lambda)} + O\left(\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{k-1}\right) + 1,$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von k und Ω abhängen kann.

In unserem Fall ergibt sich folgende Zuordnung:

Theorem 4.21	Ω	$\mathbb{R}^k$	Λ	λ_1	t
Unsere Anwendung	$\Delta(1)$	$\overline{W} \cong \mathbb{R}^{nd}$	$(\mathfrak{a})^N \cap W$	λ_1	$T^{1/d}$

Proposition 4.22. Die Menge $\Delta(1)$ ist beschränkt mit C^1-parametrisierbarem Rand.

Für den Beweis wird eine Reihe von technischen Lemmata benötigt, die wir zum besseren Verständnis in Kapitel 5 separat behandeln.
Mit Hilfe der Proposition 4.22 werden jetzt alle Voraussetzungen für Theorem 4.21 erfüllt, das wir nun anwenden wollen, um Theorem 4.4 zu zeigen. Dazu fehlt uns noch die folgende Proposition:

Proposition 4.23. Mit μ bezeichnen wir das Lebesguemaß in W und mit $\overline{\Delta(1)}$ den Abschluss der Menge $\Delta(1)$. Dann gilt:

$$\mu(\overline{\Delta(1)}) = Rn^{r+s-1}\alpha(n)^r\alpha(2n)^s.$$

Beweis:
<u>1.Schritt:</u> Polarkoordinaten für die Vervollständigungen von K einführen
Für $N_\nu = 2$, das heißt $K_\nu = \mathbb{C}$, seien $\rho_{i\nu}, \theta_{i\nu}$ die Polarkoordinaten in K_ν. Also $\rho_{i\nu} = |z_{i\nu}| = \sqrt{\mathrm{Re}(z_{i\nu})^2 + \mathrm{Im}(z_{i\nu})^2}$ und $\theta_{i\nu} = \arg(z_{i\nu})$. Für $N_\nu = 1$, das heißt $K_\nu = \mathbb{R}$, setze $\rho_{i\nu} = |z_{i\nu}|$. Nun lässt sich W mit K^n identifizieren. Damit gilt nun:

$$\mu(\overline{\Delta(1)}) = \int_{\overline{\Delta(1)}} \prod_{i,\nu} dz_{i\nu}$$

$$= (2^n)^r \int\int\int \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} \rho_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} d\theta_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ rell}}} d\rho_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} d\rho_{i\nu}.$$

Hierbei laufen das erste und zweite Integral über alle $\rho_{i\nu} \geq 0$ mit $\prod_\nu \|\rho_{i\nu}\|_{L^2_\nu} \leq 1$ und $\mathrm{pr}(\log(\|\rho_{i\nu}\|_{L^2_\nu})) \in F$. Für das dritte Integral gilt $0 \leq \theta_{i\nu} \leq 2\pi$. Der Faktor $(2^n)^r$ entsteht, da wir im Fall $N_\nu = 1$ durch $\rho_{i\nu} = |z_{i\nu}|$ eine Symmetrie haben. Nun läßt sich die Integration über $\theta_{1\nu}, \ldots, \theta_{n\nu}$ ausführen und wir erhalten:

$$2^{nr}(2\pi)^{ns} \int\int \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} \rho_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} d\rho_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ rell}}} d\rho_{i\nu} = 2^{nr}(2\pi)^{ns} \int \prod_{i,\nu} \rho_{i\nu}^{N_\nu - 1} d\rho_{i\nu}.$$

Die Integrationsbedingung der Integrale bleibt dabei unverändert.

2.Schritt: Wechsel in hypersphärische Koordinaten für alle Stellen ν

Wir setzen:

$$\begin{aligned}
\rho_{1\nu} &= r_\nu \cos(\phi_{1\nu}) \\
\rho_{2\nu} &= r_\nu \sin(\phi_{1\nu}) \cos(\phi_{2\nu}) \\
\rho_{3\nu} &= r_\nu \sin(\phi_{1\nu}) \sin(\phi_{2\nu}) \cos(\phi_{3\nu}) \\
&\vdots \\
\rho_{(n-1)\nu} &= r_\nu \sin(\phi_{1\nu}) \cdot \ldots \cdot \sin(\phi_{(n-2)\nu}) \cos(\phi_{(n-1)\nu}) \\
\rho_{n\nu} &= r_\nu \sin(\phi_{1\nu}) \cdot \ldots \cdot \sin(\phi_{(n-2)\nu}) \sin(\phi_{(n-1)\nu})
\end{aligned}$$

Für das Volumenelement gilt dann:

$d\rho_{1\nu} \cdot \ldots \cdot d\rho_{n\nu} = r_\nu^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_{1\nu}) \sin^{n-3}(\phi_{2\nu}) \cdot \ldots \cdot \sin(\phi_{(n-2)\nu}) dr_\nu d\phi_{1\nu} \cdot \ldots \cdot d\phi_{(n-1)\nu}$.

Das wenden wir jetzt auf unser letztes Ergebnis aus dem 1.Schritt an. Damit erhalten wir:

$$2^{nr}(2\pi)^{ns} \int \prod_{i,\nu} \rho_{i\nu}^{N_\nu - 1} d\rho_{i\nu}$$

$$= 2^{nr}(2\pi)^{ns} \int \prod_{\nu} r_\nu^{(n-1)+n(N_\nu-1)} \sin^{(n-2)+(n-1)(N_\nu-1)}(\phi_{1\nu}) \cos^{N_\nu-1}(\phi_{1\nu}) \cdot$$

$$\cdot \sin^{(n-3)+(n-2)(N_\nu-1)}(\phi_{2\nu}) \cos^{N_\nu-1}(\phi_{2\nu}) \sin^{(n-4)+(n-3)(N_\nu-1)}(\phi_{3\nu}) \cos^{N_\nu-1}(\phi_{3\nu}) \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \sin^{(n-n)+(n-(n-1))(N_\nu-1)}(\phi_{(n-1)\nu}) \cos^{N_\nu-1}(\phi_{(n-1)\nu}) dr_\nu d\phi_{1\nu} \cdot \ldots \cdot d\phi_{(n-1)\nu}$$

mit den neuen Integrationsbedingungen $\prod_\nu r_\nu^{N_\nu} \leq 1$, $\mathrm{pr}((\log(r_\nu^{N_\nu}))_{\nu \in S_\infty}) \in F$ und $0 \leq \phi_{i\nu} \leq \frac{\pi}{2}$.

3.Schritt: Integration über $\phi_{1\nu}, \ldots, \phi_{(n-1)\nu}$ für ν reell

Nun ist zu berechnen:

$$\prod_{i=0}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^i(\phi_{(n-1-i)\nu}) d\phi_{(n-1-i)\nu} \overset{\otimes}{=} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{\Gamma(\frac{i}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{i}{2}+1)}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{\Gamma(\frac{i}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{i}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Für die Gleichheit $\otimes$ siehe [Br], Kapitel 21.6, 7a.

4.Schritt: Integration über $\phi_{1\nu}, \dots, \phi_{(n-1)\nu}$ für ν komplex

Hier ist zu berechnen:

$$\prod_{i=0}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{i+(i+1)}(\phi_{(n-1-i)\nu}) \cos(\phi_{(n-1-i)\nu}) d\phi_{(n-1-i)\nu}$$

$$\overset{\otimes}{=} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{\Gamma(i+1)}{2\Gamma(i+2)} = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+2)} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\Gamma(n)}.$$

Für die Gleichheit $\otimes$ siehe [Br], Kapitel 21.6, 7a.

5.Schritt: Zusammensetzen der Zwischenergebnisse

Mit den Ergebnissen aus dem 3. und 4.Schritt lässt sich jetzt das Integral aus dem 2.Schritt zu

$$2^{nr}(2\pi)^{ns} \left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right)^r \left(\frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\Gamma(n)} \right)^s \int \prod_\nu r_\nu^{(n-1)+n(N_\nu-1)} dr_\nu$$

$$\overset{1.1}{=} n^{r+s} \alpha(n)^r \alpha(2n)^s 2^s \int \prod_\nu r_\nu^{(n-1)+n(N_\nu-1)} dr_\nu$$

vereinfachen, wobei die Integrale über $\prod_\nu r_\nu^{N_\nu} \leq 1$ und $\mathrm{pr}((\log(r_\nu^{N_\nu}))_{\nu\in S_\infty}) \in F$ laufen.

6.Schritt: Integration über r_ν

Wir wollen das Integral

$$\int \prod_\nu r_\nu^{(n-1)+n(N_\nu-1)} dr_\nu = \int \prod_\nu r_\nu^{(nN_\nu-1)} dr_\nu$$

über $\prod_\nu r_\nu^{N_\nu} \leq 1$ und $\mathrm{pr}((\log(r_\nu^{N_\nu}))_{\nu\in S_\infty}) \in F$ berechnen. Setze dazu $t_\nu = r_\nu^{N_\nu}$. Damit ist dann das Integral

$$\int \prod_\nu \frac{1}{N_\nu} \frac{r_\nu^{nN_\nu-1}}{r_\nu^{N_\nu-1}} dt_\nu = \int \prod_\nu \frac{1}{N_\nu} r_\nu^{N_\nu(n-1)} dt_\nu = \frac{1}{2^s} \int \prod_\nu t_\nu^{n-1} dt_\nu$$

zu bestimmen, wobei die Integrationen über $\prod_\nu t_\nu \leq 1$ und $\mathrm{pr}((\log(t_\nu))_{\nu\in S_\infty}) \in F$ laufen. Setze weiter $u = \prod_\nu t_\nu$ und $\xi_j = \tau_j(\mathrm{pr}((\log(t_\nu))_{\nu\in S_\infty}))$ für $j = 1, \dots, r+s-1$. Dabei ist die Determinante der Jakobimatrix $\pm R$, und wir erhalten:

$$\frac{1}{2^s} \int \prod_\nu t_\nu^{n-1} dt_\nu = \frac{R}{2^s} \int u^{n-1} du \prod_j d\xi_j = \frac{R}{2^s} \frac{1}{n},$$

wobei die Integration über $0 \le u \le 1$ und $0 \le \xi_j \le 1$ geht.

7.Schritt: Beweis der Behauptung

Schließlich setzen wir die Lösung für die Integration über r_ν (6.Schritt) in das letzte Ergebnis aus dem 5.Schritt ein und erhalten:

$$\begin{aligned} n^{r+s}\alpha(n)^r\alpha(2n)^s 2^s \int \prod_\nu r_\nu^{(n-1)+n(N_\nu-1)} dr_\nu &= n^{r+s}\alpha(n)^r\alpha(2n)^s 2^s \frac{R}{2^s}\frac{1}{n} \\ &= Rn^{r+s-1}\alpha(n)^r\alpha(2n)^s. \end{aligned}$$

□

Beweis von Theorem 4.4

Setze $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega\lambda^W(\mathfrak{a}, T) &\overset{4.19}{=} |(\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T)| \overset{4.20(c)}{=} |(\mathfrak{a})^N \cap T^{1/d}\Delta(1)| \\ &\overset{\Delta(1)\subset\prod_\nu\left(W_\nu\setminus\{0^N\}\right)}{=} |\underbrace{\left((\mathfrak{a})^N \cap W\right)}_{\Lambda} \cap \underbrace{T^{1/d}\Delta(1)}_{t\Omega}| \\ &\overset{4.21}{=} T^n \frac{\mu(\overline{\Delta(1)})}{\det((\mathfrak{a})^N \cap W)} + O\left(\left(\frac{T^{1/d}}{\lambda_1}\right)^{dn-1}\right) + 1 \\ &\overset{2.17}{=} T^n \frac{\mu(\overline{\Delta(1)})}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d D_{K/\mathbb{Q}}^{n/2} 2^{-ns}\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n} + O\left(\left(\frac{T^{1/d}}{\lambda_1}\right)^{dn-1}\right) + 1 \\ &\overset{4.23}{=} T^n \frac{Rn^{r+s-1}\alpha(n)^r\alpha(2n)^s}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d D_{K/\mathbb{Q}}^{n/2} 2^{-ns}\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n} + O\left(\left(\frac{T^{1/d}}{\lambda_1}\right)^{dn-1}\right) + 1 \\ &= \underbrace{R\,\mathrm{D}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}^{-n/2}\, n^{r+s-1}\alpha(n)^r\left\{2^n\alpha(2n)\right\}^s \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^{-d}}_{\omega c_n} \|\mathfrak{d}\|^n + O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-1/d}\right) + 1 \end{aligned}$$

□

5 Parametrisierbarkeit der Menge $\Delta(1)$

Ziel dieses Kapitels ist es, die noch offene Proposition aus dem vorigem Kapitel zu zeigen.

Proposition 4.22. Die Menge $\Delta(1)$ ist beschränkt mit C^1-parametrisierbarem Rand.

Der Beweis, der aus einer Reihe von Lemmata besteht, folgt der Struktur von Schanuel [S]. Zuerst zeigen wir, dass $\Delta(1) = \Delta \cap R(1)$ beschränkt ist. Hierbei sind die Eigenschaften beider Mengen, aus denen $\Delta(1)$ besteht, für die Aussage nötig. Nach zwei technischen Lemmata über den Abschluss spezieller Mengen, werden wir die Parametrisierbarkeit der Ränder von Δ und $R(1)$ verifizieren. Insbesondere bei letzterem weichen wir stark von Schanuel ab. Mit diesen Resultaten erhalten wir aufgrund der Definition von C^1-Parametrisierungen die gewünschte Aussage. Zur Vereinfachung der Notation läuft in diesem Kapitel der Index ν über S_∞.

Definition 5.1. Sei $I^k := [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$ der abgeschlossene k-dimensionale Einheitswürfel.

- Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ heißt *Lipschitz-parametrisierbar* (durch $(k-1)$-dimensionale Einheitswürfel), wenn sie in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $\Phi_j(I^{k-1})$ enthalten ist, wobei $\Phi_j : I^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ die Lipschitz-Bedingung $|\Phi_j(x) - \Phi_j(y)| < c_1|x-y|$ erfüllt, und c_1 eine von j, x, y unabhängige Konstante ist. (j ist Element der endlichen Indexmenge.)

- Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ heißt C^1*-parametrisierbar* (durch $(k-1)$-dimensionale Einheitswürfel), wenn sie in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $\Phi_j(I^{k-1})$ enthalten ist, wobei die Φ_j stetige partielle Ableitungen haben.

- Aus dem Mittelwertsatz ([Kö], Abschnitt 2.3) folgt direkt, dass C^1-Parametrisierungen auch Lipschitz sind.

Lemma 5.2. $\Delta(1) = \Delta \cap R(1)$ ist beschränkt.

Beweis: Sei $M := \{y \in \prod_\nu \mathbb{R}_\nu | \sum_\nu y_\nu \leq 0\}$.

<u>1.Schritt:</u> Es gilt für $y = (y_\nu) \in M \cap \mathrm{pr}^{-1}(F)$, dass y_ν für alle $\nu \in S_\infty$ nach oben beschränkt ist.

Beweis: Da $y = (y_\nu) \in M \cap \mathrm{pr}^{-1}(F) \subset \mathrm{pr}^{-1}(F)$ gewählt, folgt:

$$F \ni \mathrm{pr}(y) = y - \frac{1}{d} \sum_{\omega \in S_\infty} y_\omega(N_\nu) \quad \Leftrightarrow \quad y = \mathrm{pr}(y) + \frac{1}{d} \sum_{\omega \in S_\infty} y_\omega(N_\nu).$$

Damit haben wir y als Summe dargestellt. Der erste Summand hat beschränkte Komponenten, da $\mathrm{pr}(y) \in F = \{y \in H | 0 \leq \tau_j(y) < 1\}$. Hierbei bilden die τ_j die duale Basis zu H (siehe 4.13). Der zweite Summand hat wegen $y = (y_\nu) \in M \cap \mathrm{pr}^{-1}(F) \subset M = \{y \in \prod_\nu \mathbb{R}_\nu | \sum_\nu y_\nu \leq 0\}$ negative Komponenten. Damit haben wir den 1.Schritt gezeigt.

2.Schritt: Es gilt $\Delta(1) = \eta^{-1}(M \cap \mathrm{pr}^{-1}(F))$

Beweis: Klar ist, dass $\eta^{-1}(M \cap \mathrm{pr}^{-1}(F)) = \eta^{-1}(M) \cap \eta^{-1}(\mathrm{pr}^{-1}(F))$. Nach Definition von $\Delta(1) = R(1) \cap \eta^{-1}(\mathrm{pr}^{-1}(F))$ genügt es zu zeigen, dass $R(1) = \eta^{-1}(M)$. Dazu erinnern wir an die benötigten Definitionen (siehe 4.13 und 4.11) von

$$R(1) = \{(X_\nu) \in \overline{W} | \prod_\nu \|X_\nu\|_{L^2_\nu} \leq 1\}$$

und

$$\eta : \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right) \to \prod_\nu \mathbb{R}_\nu, \quad \eta = (\eta_\nu)_{\nu \in S_\infty},$$

wobei $\eta_\nu : W_\nu \setminus \{0^N\} \to \mathbb{R}_\nu = \mathbb{R}$ mit $\eta_\nu(X_\nu) = \log(\|X_\nu\|_{L^2_\nu})$. Nun folgt die gewünschte Gleichheit $R(1) = \eta^{-1}(M)$ aus der Umformung

$$\sum_\nu \log\left(\|X_\nu\|_{L^2_\nu}\right) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\prod_\nu \|X_\nu\|_{L^2_\nu}\right) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \prod_\nu \|X_\nu\|_{L^2_\nu} \leq 1$$

und damit der 2.Schritt.

3.Schritt: Jetzt gilt aufgrund der Definition von η (siehe 4.11), dass Z aus beschränkten Komponenten besteht, wenn $\eta(Z)$ nach oben beschränkte Komponenten hat. Dies impliziert mit den beiden vorherigen Schritten, dass $\Delta(1)$ beschränkt ist. $\square$

Lemma 5.3. $\left|\frac{y_{\nu'}}{N_{\nu'}} - \frac{y_{\nu''}}{N_{\nu''}}\right|$ ist gleichmäßig beschränkt für $\nu', \nu'' \in S_\infty$, $y = (y_\nu) \in \mathrm{pr}^{-1}(F)$.

Beweis: Nach Definition von pr (siehe 4.11) gilt:

$$(\mathrm{pr}(y))_\nu = y_\nu - \left(\frac{1}{d} \sum_{\omega \in S_\infty} y_\omega\right) N_\nu.$$

Division durch N_ν liefert uns:

$$\frac{(\mathrm{pr}(y))_\nu}{N_\nu} = \frac{y_\nu}{N_\nu} - \frac{\sum_{\omega \in S_\infty} y_\omega}{d}.$$

Die linke Seite ist, wie wir im Beweis von Lemma 5.2 im 1.Schritt gesehen haben, beschränkt, weil $y \in \mathrm{pr}^{-1}(F) \Leftrightarrow \mathrm{pr}(y) \in F$. Aufstellen dieser Gleichung einmal für $\nu = \nu'$ und einmal für $\nu = \nu''$ sowie Bilden der Differenz dieser beiden liefert:

$$\frac{(\mathrm{pr}(y))_{\nu'}}{N_{\nu'}} - \frac{(\mathrm{pr}(y))_{\nu''}}{N_{\nu''}} = \frac{y_{\nu'}}{N_{\nu'}} - \frac{\sum_{\omega \in S_\infty} y_\omega}{d} - \left(\frac{y_{\nu''}}{N_{\nu''}} - \frac{\sum_{\omega \in S_\infty} y_\omega}{d}\right) = \frac{y_{\nu'}}{N_{\nu'}} - \frac{y_{\nu''}}{N_{\nu''}}.$$

Weil die linke Seite eine Differenz beschränkter Zahlen ist, ist auch die rechte Seite beschränkt. Insbesondere ist damit der Betrag der rechten Seite beschränkt. □

Lemma 5.4. Der Abschluss von $(\mathrm{pr}\circ\log)^{-1}(F)$ in $\prod_\nu \overline{\mathbb{R}_\nu^+}$ ist enthalten in $\prod_\nu \mathbb{R}_\nu^+ \cup \{0\}$

Beweis: Sei $x^j \in (\mathrm{pr}\circ\log)^{-1}(F)$ so, dass $x^j_{\nu'} \to 0$ für eine Stelle $\nu' \in S_\infty$. Setze $y^j = \log(x^j)$. Dann folgt $y^j_{\nu'} \to -\infty$. Nun gilt mit Lemma 5.3 für alle anderen Stellen $\nu'' \in S_\infty$, dass $y^j_{\nu''} \to -\infty$. Somit folgt $x^j_{\nu''} \to 0$ wie gewünscht. □

Wir erinnern an die in 4.11 eingeführten Notationen: W_ν ist die Vervollständigung von W und $\overline{W} = \prod_\nu W_\nu$. Sei $\Phi : \overline{W} \to \prod_\nu \overline{\mathbb{R}_\nu^+}$ definiert durch $(\Phi(Z))_\nu = \|Z_\nu\|_{L^2_\nu}$. Dann ergibt sich das folgende Diagramm stetiger Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccccc}
\prod_\nu (W_\nu \setminus \{0^N\}) & \xrightarrow{\Phi_0} & \prod_\nu \mathbb{R}_\nu^+ & \xrightarrow{\log} & \prod_\nu \mathbb{R}_\nu & \xrightarrow{\mathrm{pr}} & H \subset \prod_\nu \mathbb{R}_\nu \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\prod_\nu W_\nu & \xrightarrow{\Phi} & \prod_\nu \overline{\mathbb{R}}_\nu^+ & & & &
\end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen Inklusionsabbildungen und Φ_0 die Einschränkung von Φ ist. Weiter gilt $\log(\Phi_0) = \eta$.

Lemma 5.5. Der Abschluss von Δ in $\overline{W}$ ist enthalten in $\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right) \cup \{0\}$.

Beweis: Es gilt $\Delta = \Phi^{-1}(\mathrm{pr}\circ\log)^{-1}(F)$. Da Φ stetig folgt:

$$\overline{\Delta} \subset \Phi^{-1}\left(\overline{(\mathrm{pr}\circ\log)^{-1}(F)}\right) \overset{5.4}{\subset} \Phi^{-1}\left(\prod_\nu \mathbb{R}_\nu^+ \cup \{0\}\right) \subset \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right) \cup \{0\},$$

wobei der Balken jeweils den Abschluss in $\prod_\nu \mathbb{R}_\nu^+$ bzw. $\overline{W}$ bezeichnet. □

Für die nächsten beiden Lemmata bezeichnen wir mit dem Buchstaben D die Ableitung einer Abbildung von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ in den $\mathbb{R}^l$ und mit $\partial\Gamma$ den Rand von $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ in der gewöhnlichen Topologie auf $\mathbb{R}^k$.

Lemma 5.6. Jede kompakte Teilmenge von $\partial R(1)$ ist C^1-parametrisierbar.

Beweis: Sei $\rho : \overline{W} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ gegeben durch $\rho(Z) = \prod_\nu \|Z_\nu\|_{L^2_\nu}$. Dann ist ρ auf $\rho^{-1}(\mathbb{R}^+)$ stetig differenzierbar mit nicht verschwindender Ableitung. Es gilt $R(1) = \rho^{-1}([0,1])$ und damit

$$\partial R(1) \subset \rho^{-1}\left(\partial_{\overline{\mathbb{R}}^+}([0,1])\right) = \rho^{-1}(1).$$

Sei H die abgeschlossene Hyperfläche $\rho^{-1}(1)$. Wähle für jedes $Z \in H$ eine offene Umgebung U_Z und eine stetig differenzierbare Abbildung $\Psi_Z : I^{dN-1} \rightarrow \mathbb{R}^{dN}$, die die Bedingung

$$U_Z \cap H \subset \Psi_Z\left(I^{dN-1}\right) \subset H$$

erfüllen. Dies ist nach dem Satz über implizite Funktionen ([Ka], Kapitel II, Theorem 22.5) möglich, da

$$D\rho(Z) = \left(\prod_{\nu \neq \omega} \|Z_\nu\|_{L^2_\nu} \cdot \frac{N_\omega}{\left(\|Z_\omega\|_{L^2_\omega}\right)^{2-N_\omega}} \cdot Z_\omega\right)_{\omega \in S_\infty} \in \overline{W}$$

und damit sowohl linaer unabhängig von den Gleichungen ist, die W bestimmen, als auch in keinem Punkt von H verschwindet. Für eine kompakte Teilmenge $C \subset R(1)$ wählen wir eine endliche Menge von Umgebungen U_Z, die die Menge $C \cap H$ überdecken. Dann gilt:

$$C = C \cap H = \dot{\bigcup} \left(U_Z \cap H\right) \subset \dot{\bigcup} \Psi_Z\left(I^{dN-1}\right),$$

wobei die Vereinigungen über die endliche Menge der vorher gewählten Umgebungen U_Z laufen. □

Die Parametrisierung der Teilmengen von $\partial\Delta$ ist ähnlich. Dazu bezeichnen wir für den Rest des Kapitels die $(dN-1)$-Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{dN} = \prod_\nu K_\nu^N$ mit S.

Lemma 5.7. Der Durchschnitt von $\partial\Delta$ mit S ist durch $(dN-2)$-Würfel C^1-parametrisierbar.

Beweis: Ziel ist es, endlich viele Hyperflächen zu definieren, die die Menge $\partial\Delta \cap S$ überdecken. Wenn wir diese Vereinigung parametrisieren können, ist das nach Definition (siehe 5.1) auch mit jeder Teilmenge möglich, also insbesondere mit $\partial\Delta \cap S$. Um nun eine Idee zur Konstruktion der Hyperflächen zu erhalten, erinnern wir an die Definition von Δ. Diese Menge besteht aus allen Elementen $Z \in \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ mit $0 \leq \tau_j \operatorname{pr} \eta(Z) < 1$ (siehe 4.13). Setze $\alpha = (j, \delta)$ für $j = 1, \ldots, r+s-1$ und $\delta \in \{0, 1\}$. Damit definieren wir

$$\rho_\alpha : \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho_\alpha(Z) = \tau_j\left(\operatorname{pr}\left(\eta\left(Z\right)\right)\right) - \delta$$

und die Hyperfläche

$$H_\alpha := \left\{ Z \in \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right) \middle| \rho_\alpha(Z) = 0 \right\}.$$

Da ρ_α stetig ist, ist H_α abgeschlossen in $\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$. Weiter folgt analog zum Beweis von Lemma 4.20 (a), dass $\rho_\alpha(tZ) = \rho_\alpha(Z)$ für $t \in \mathbb{R}^*$. Weil τ_j und pr linear und surjektiv sind, ist $D\eta(Z) : \mathbb{R}^{dN} \to \prod_\nu \mathbb{R}_\nu$ surjektiv für alle Z. Damit ist auch $D\rho_\alpha(Z)$ surjektiv und insbesondere verschieden von Null. Nun können wir mit der Homogenität von ρ_α und dem Satz von Euler für homogene Funktionen ([Ha], Abschnitt 3.2.4) zeigen, dass $D\rho_\alpha(Z)$ senkrecht zu Z. Daraus folgt dann, dass $D\rho_\alpha(Z)$ und $D\xi(Z)$ linear unabhängig sind (nämlich orthogonal), wobei $\xi(Z)$ die euklidische Norm des Vektors Z auf $\mathbb{R}^{dN}$ ist, und wir können den Satz über implizite Funktionen ([Ka], Kapitel II, Theorem 22.5) anwenden. Für $Z \in H_\alpha \cap S$ existiert eine Umgebung $U_{Z,\alpha}$ von Z und eine differenzierbare Funktion $\Psi_{Z,\alpha} : I^{dN-2} \to \mathbb{R}^{dN}$ so, dass

$$U_{Z,\alpha} \cap H_\alpha \cap S \subset \Psi_{Z,\alpha}\left(I^{dN-2}\right) \subset H_\alpha \cap S.$$

Wir wollen, dass $\partial\Delta \cap S$ in einer endlichen Vereinigung kompakter Teilmengen $H'_\alpha \subset H_\alpha \cap S$ enthalten ist, dann lässt sich der Beweis analog zu Lemma 5.6 beenden. Setze

$$H'_\alpha := H_\alpha \cap \partial\Delta \cap S$$

für $\alpha = (j, \rho)$. Dann ist H'_α kompakt, da alle drei Mengen in $\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ abgeschlossen sind und S kompakt ist. Nun folgt mit Lemma 5.5, dass $\partial\Delta \cap S$ im Rand von Δ bezüglich $\prod_\nu W_\nu \setminus \{0\}$ enthalten ist. Aber jeder Punkt des letzten Randes erfüllt $\tau_j(\mathrm{pr}(\eta(Z))) = \rho$ für passende j, ρ. Das liefert uns

$$\partial\Delta \cap S \subset \bigcup_\alpha H'_\alpha$$

wie gewünscht. □

Lemma 5.8. Der Rand von $\Delta(1)$ ist parametrisierbar.

Beweis: Aus der Definition $\Delta(1) = \Delta \cap R(1)$ folgt direkt $\partial\Delta(1) \subset \partial\Delta \cup \partial R(1)$.
<u>1.Schritt:</u> Es genügt, kompakte Teilmengen von $\partial\Delta$ und $\partial R(1)$ zu parametrisieren. Setze $M_1 := \partial\Delta(1) \cap \partial R(1)$ und $M_2 := \partial\Delta(1) \cap \partial\Delta$. Beide Mengen sind beschränkt, weil $\Delta(1)$ (siehe 5.2) und damit auch $\partial\Delta(1)$ beschränkt ist. Weiter gilt $\partial R(1) \subset \prod_\nu K_\nu^N = \mathbb{R}^{dN}$ und $\partial\Delta \subset \prod_\nu K_\nu^N = \mathbb{R}^{dN}$. In $\mathbb{R}^{dN}$ ist der Abschluss einer beschränkten Menge kompakt. Nun sind aber $\overline{M_1}$ und $\overline{M_2}$ beide C^1-parametrisierbar und damit auch $\overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Es gilt $\partial\Delta(1) \subset M_1 \cup M_2 \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Nun folgt aber direkt aus der Definition 5.1, dass Teilmengen einer C^1-parametrisierbaren Menge selbst wieder C^1-parametrisierbar sind und damit der 1.Schritt.

2.Schritt: Jede kompakte Teilmenge von $\partial R(1)$ ist nach Lemma 5.6 parametrisierbar.
3.Schritt: Zum Schluss müssen wir noch zeigen, dass kompakte Teilmengen von $\partial\Delta$ parametrisierbar sind.
Weil Δ nach Lemma 4.20 (a) homogen ist, gilt dies auch für $\partial\Delta$. Damit folgt $\partial\Delta = \mathbb{R}^+(\partial\Delta \cap S) \cup \{0\}$. Daran erkennen wir, wie sich kompakte Teilmengen von $\partial\Delta$ parametrisieren lassen. Sei dazu $\Phi_j : I^{dN-2} \to \mathbb{R}^{dN}$ eine C^1-Parametrisierung von $\partial\Delta \cap S$. Diese existiert nach Lemma 5.7. Dann genügt uns die Abbildung

$$\xi : I^{dN-1} \to \mathbb{R}^{dN} \quad \text{mit } \xi_j(X,t) = ct\Phi_j(X),$$

um jede beschränkte (also auch kompakte) Teilmenge M von $\partial\Delta \setminus \{0\}$ zu parametrisieren. Nun müssen wir nur noch der Fall $\partial\Delta \cap S = \emptyset$ (bei $r = 0$) untersuchen. In diesem haben wir den Punkt 0 nicht betrachtet, den wir dann einzeln parametrisieren. $\square$

6 Verallgemeinerter Satz von Schanuel

Mit den Vorarbeiten aus den letzten zwei Kapiteln ist es uns nun möglich, den Beweis des verallgemeinerten Satzes von Schanuel abzuschließen. Dazu ist es nötig, den Divisorensatz von Schanuel in eine Aussage für alle Punkte in L zu übersetzen. Hierzu führen wir zunächst eine Inversion über alle Ideale durch. Die bei dieser Inversion entscheidenen Auswirkungen auf die einzelnen Summanden des Divisorensatzes werden vorher in einem Lemma extra untersucht. Dazu sind Abschätzungen für Summen von Idealen nötig, die wir nur zitieren. Mit dem aus der Inversion stammenden Resultat lässt sich der Beweis des verallgemeinerten Satzes von Schanuel dann durch eine kurze Rechnung abschließen.

6.1. Sei I die multiplikative Halbgruppe der ganzen Ideale von K ohne das Nullideal. Wir setzen $\mathbb{R}(I) := \{\chi : I \to \mathbb{R} \mid \chi \text{ Abbildung }\}$. Dann ist $\mathbb{R}(I)$ ein kommutativer Ring mit 1, wobei die Addition punktweise und die Multiplikation durch die Faltung

$$(\chi_1\chi_2)(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}} \chi_1(\mathfrak{a}_1)\chi_2(\mathfrak{a}_2)$$

definiert sind ([S], S. 444). Wir erinnern daran (siehe 4.1), dass die Divisoren auf K mit der komponentenweisen Multiplikation die Gruppe D bilden. Sei nun weiter $\mathbb{R}(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung und } f(\mathfrak{d}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathfrak{d}\| < 1\}$. Dann ist $\mathbb{R}(D)$ mit

$$\chi f(\mathfrak{a}, T) = \sum_{\mathfrak{b}} \chi(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T)$$

ein $R(I)$-Modul, wobei die Summe über alle ganzen Ideale $\mathfrak{b}$ läuft ([S], S. 445). Beachte, dass in beiden Faltungen die Summen endlich sind, da die Menge der ganzen Ideale mit Norm kleiner gleich einer Konstanten endlich ist ([ST], Chapter 5.3, Theorem 5.12). Wir erinnern an die Möbiussche Funktion (siehe 1.8) $\mu(\mathfrak{p}) = -1$, $\mu(\mathfrak{p}^t) = 0$ für $t > 1$, $\mu(\mathfrak{o}_K) = 1$ und $\mu(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{b}) = \mu(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ teilerfremd. Es gilt $\mu \in \mathbb{R}(I)$. Sei χ_0 die konstante Funktion $\chi_0(\mathfrak{a}) = 1$ für alle $\mathfrak{a}$. Dann liefert uns die Möbiussche Umkehrformel, dass μ und χ_0 invers sind.

Lemma 6.2. Seien $f, g \in \mathbb{R}(D)$. Falls $f(\mathfrak{d}) = \alpha\|\mathfrak{d}\|^s$ für $\|\mathfrak{d}\| \geq 1$ und festes $s > 1$, dann gilt:

$$\mu f(\mathfrak{d}) = \frac{\alpha}{\zeta_K(s)}\|\mathfrak{d}\|^s + O(\|\mathfrak{d}\|).$$

Falls $g(\mathfrak{d}) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right) + 1$ für $\|\mathfrak{d}\| \geq 1$ und festes $t \geq 1$, dann gilt:

$$\mu g(\mathfrak{d}) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right) + O(\|\mathfrak{d}\|) \text{ für } t > 1$$

und
$$\mu g(\mathfrak{d}) = O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\left(1+\log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)\right)\right) + O\left(\|\mathfrak{d}\|\right) \text{ für } t = 1.$$

Für den Beweis dieses Lemmas benötigen wir zunächst einige Abschätzungen über Summen von Idealen mit Norm $\leq$ bzw. $\geq$ einer gegebenen Konstanten.

Lemma 6.3. Sei $F(m)$ die Anzahl der ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ von K mit $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) = m$. Dann gilt:

(a) Für $0 \leq s < 1$
$$\sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{F(m)}{m^s} = O\left(x^{1-s}\right).$$

(b) Für $s = 1$
$$\sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{F(m)}{m} = O\left(1+\log^+(x)\right).$$

(c) Für $s > 1$
$$\sum_{m=\lfloor x \rfloor+1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^s} = O\left(x^{1-s}\right).$$

Beweis: Für Teil (a) im Fall $s = 0$ siehe [La], Satz 202. Die anderen Fälle von Teil (a) und der Teil (c) sind in [La], Satz 203 zu finden. Um den Teil (b) zu zeigen, ist eine Anpassung von Fall 1 des Beweises von Satz 203 auf $\vartheta = 1$ nötig. Dazu wird in der letzten Summe des Beweises der erste Summand abgespalten und die Rechnung analog fortgeführt. □

Beweis von Lemma 6.2: Sei $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$. Als erstes wollen wir die Aussage über die Funtion f beweisen. Es gilt mit der Multiplikation von $\mathbb{R}(D)$ als $\mathbb{R}(I)$-Modul
$$\mu f(\mathfrak{d}) = \sum_{\mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T).$$

Nach Definition von $\mathbb{R}(D)$ gilt $f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T) = 0$ für $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) > T$. Somit folgt:
$$\sum_{\mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T) = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \leq T} \mu(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T).$$

Nach dem Einsetzen der Definitionen von f und $\|.\|$ erhalten wir:
$$\sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \leq T} \mu(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T) = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \leq T} \mu(\mathfrak{b}) \alpha \left|\left|(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T)\right|\right|^s$$

$$= \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba})\leq T} \mu(\mathfrak{b})\alpha T^s \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba})^{-s}.$$

Indem wir die Multiplikativität der Norm ([Le], Kapitel 13.3, Satz 4) und die Äquivalenz $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba}) \leq T \Leftrightarrow \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) \leq \|\mathfrak{d}\|$ ausnutzen, können wir schließen:

$$\sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba})\leq T} \mu(\mathfrak{b})\alpha T^s \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba})^{-s} = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba})\leq T} \mu(\mathfrak{b})\alpha T^s \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s}\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s}$$

$$= \alpha T^s \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s} \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba})\leq T} \mu(\mathfrak{b})\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s} = \alpha\|\mathfrak{d}\|^s \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba})\leq T} \mu(\mathfrak{b})\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s}$$

$$= \alpha\|\mathfrak{d}\|^s \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})\leq \|\mathfrak{d}\|} \mu(\mathfrak{b})\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s}.$$

Nun wissen wir aus Lemma 1.9 (c):

$$\zeta_K(s)^{-1} = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^s} = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})\leq \|\mathfrak{d}\|} \mu(\mathfrak{b})\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s} + \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})> \|\mathfrak{d}\|} \mu(\mathfrak{b})\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s}.$$

Somit folgt:

$$\sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})\leq \|\mathfrak{d}\|} \mu(\mathfrak{b})\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s} = \zeta_K(s)^{-1} - \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})> \|\mathfrak{d}\|} \mu(\mathfrak{b})\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s}.$$

Einsetzen dieser Gleichung in unseren letzten Zwischenschritt liefert:

$$\alpha\|\mathfrak{d}\|^s \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})\leq \|\mathfrak{d}\|} \mu(\mathfrak{b})\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s} = \alpha\|\mathfrak{d}\|^s\zeta_K(s)^{-1} - \alpha\|\mathfrak{d}\|^s \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})> \|\mathfrak{d}\|} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^s}.$$

Jetzt gilt aber:

$$\sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})> \|\mathfrak{d}\|} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^s} = O\left(\sum_{m=\lfloor\|\mathfrak{d}\|\rfloor+1}^{\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{b} \\ \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})=m}} \frac{1}{m^s}\right) \overset{6.3(c)}{=} O\left(\|\mathfrak{d}\|^{1-s}\right).$$

Insgesamt gilt also:

$$\mu f(\mathfrak{d}) = \frac{\alpha\|\mathfrak{d}\|^s}{\zeta_K(s)} - \alpha\|\mathfrak{d}\|^s O\left(\|\mathfrak{d}\|^{1-s}\right) = \frac{\alpha\|\mathfrak{d}\|^s}{\zeta_K(s)} + O\left(\|\mathfrak{d}\|\right).$$

Nun zur Aussage über die Funktion g. Hier gilt analog:

$$\mu g(\mathfrak{d}) = \sum_{\mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b}) g(\mathfrak{ba}, T) = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{ba})\leq T} \mu(\mathfrak{b}) g(\mathfrak{ba}, T) = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})\leq \|\mathfrak{d}\|} \mu(\mathfrak{b}) g(\mathfrak{ba}, T)$$

Bevor wir g einsetzen, machen wir folgende Fallunterscheidung für g:
Falls $\|\mathfrak{d}\| \geq \lambda_1^d$, dann gilt $g(\|\mathfrak{d}\|) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right)$ und für $1 \leq \|\mathfrak{d}\| < \lambda_1^d$ gilt $g(\|\mathfrak{d}\|) = O(1)$. Dies liefert uns dann:

$$\sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) \leq \|\mathfrak{d}\|} \mu(\mathfrak{b}) g(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T) = \sum_{1 \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\| < \lambda_1^d} \mu(\mathfrak{b}) g(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T) + \sum_{\lambda_1^d \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|} \mu(\mathfrak{b}) g(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T)$$

$$= \sum_{1 \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\| < \lambda_1^d} \mu(\mathfrak{b}) O(1) + \sum_{\lambda_1^d \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|} \mu(\mathfrak{b}) O\left(\left(\frac{\|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right).$$

Die 1.Summe ist unabhängig von t und es gilt:

$$\sum_{1 \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\| < \lambda_1^d} \mu(\mathfrak{b}) O(1) = O\left(\sum_{1 \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\| < \lambda_1^d} 1\right) = O\left(\sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) \leq \|\mathfrak{d}\|} 1\right)$$

$$= O\left(\sum_{m=1}^{\lfloor \|\mathfrak{d}\| \rfloor} \sum_{\substack{\mathfrak{b} \\ \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) = m}} 1\right) \overset{6.3(a)}{=} O(\|\mathfrak{d}\|)$$

Für die 2.Summe folgt:

$$\sum_{\lambda_1^d \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|} \mu(\mathfrak{b}) O\left(\left(\frac{\|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right) = \sum_{\lambda_1^d \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|} \mu(\mathfrak{b}) O\left(\left(\frac{T}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \lambda_1^d}\right)^t\right)$$

$$= O\left(\sum_{\lambda_1^d \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|} \frac{T^t}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^t \lambda_1^{dt}}\right) = O\left(\sum_{\lambda_1^d \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|} \left(\frac{T}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) \lambda_1^d}\right)^t \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-t}\right)$$

$$= O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t \sum_{\lambda_1^d \leq \|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T)\|} \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-t}\right) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) \leq \frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}} \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-t}\right).$$

Nun betrachten wir zuerst den Fall $t > 1$. Hier ist die Summe durch $\zeta_K(t)$ nach oben beschränkt, also:

$$O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) \leq \frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}} \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-t}\right) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t \zeta_K(t)\right).$$

Jetzt erhalten wir aufgrund der absoluten Konvergenz der Dedekindschen Zetafunktion für $t > 1$ (siehe Lemma 1.9 (a)) weiter:

$$O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t \zeta_K(t)\right) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right).$$

Im Fall $t = 1$ gilt für die Summe:

$$O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\sum_{\mathrm{N_{K/\mathbb{Q}}}(\mathfrak{b})\leq\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}}\mathrm{N_{K/\mathbb{Q}}}(\mathfrak{b})^{-1}\right) = O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\sum_{m=1}^{\left\lfloor\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right\rfloor}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\\ \mathrm{N_{K/\mathbb{Q}}}(\mathfrak{b})=m}}\frac{1}{m}\right)$$

$$\overset{6.3(b)}{=} O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\left(1+\log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)\right)\right).$$

Die beiden betrachteten Summe ergeben zusammen

$$\mu g(\mathfrak{d}) = O(\|\mathfrak{d}\|) + \begin{cases} O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\left(1+\log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)\right)\right) & \text{für } t=1 \\ O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right) & \text{für } t>1 \end{cases}$$

wie gewünscht. □

Mit $\mathrm{Cl}(\mathfrak{a})$ bezeichnen wir die Klasse von $\mathfrak{a}$ modulo den Hauptidealen. Wie in 4.2 ist $[X]$ das von den Komponenten von X erzeugte Ideal und

$$H_\infty X := \prod_{\nu\in S_\infty}\|X\|_{L^2_\nu} := \prod_{\nu\in S_\infty}\left(\left(\sum_{i=1}^N |x_i|_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{N_\nu}.$$

Für einen Divisor $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$ sei $\tilde{L}^W(\mathfrak{d}) = \tilde{L}^W(\mathfrak{a}, T)$ die Menge der Punkte $K^*X \in \mathbb{P}_K^{n-1}$ mit $\mathrm{Cl}([X]) = \mathrm{Cl}(\mathfrak{a})$ und $\mathrm{H_{Ar}}(X)^d \leq \|\mathfrak{d}\| = T\,\mathrm{N_{K/\mathbb{Q}}}(\mathfrak{a})^{-1}$. Mit $\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{d})$ bezeichnen wir die Kardinalität von $\tilde{L}^W(\mathfrak{d})$. Beachte, dass für $\|\mathfrak{d}\| < 1$ sowohl $\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{d})$ als auch $\lambda^W(\mathfrak{d})$ Null ist, da $\mathrm{H_{Ar}}(X) \geq 1$ und $\mathfrak{d}_X$ mindestens Norm 1 hat (siehe 4.2). Somit gilt $\lambda^W, \tilde{\lambda}^W \in \mathbb{R}(D)$.

Theorem 6.4.

$$\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{d}) = \frac{c_n}{\zeta_K(n)}\|\mathfrak{d}\|^n + O(\|\mathfrak{d}\|) + \begin{cases} O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1}\right)\right)\right) & \textit{falls } d=1, n=2 \\ O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right) & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n und K abhängen kann und

$$c_n = \frac{R}{\omega}\,\mathrm{D}_{\mathrm{K/\mathbb{Q}}}^{-n/2}\,n^{r+s-1}\alpha(n)^r\{2^n\alpha(2n)\}^s\,\mathrm{H_{Ar}}(L)^{-d}.$$

Beweis: Sei $\overline{L}^W(\mathfrak{a}, T) = \left\{UX \in (W\setminus\{0^N\})/U \mid [X] = \mathfrak{a} \text{ und } H_\infty X \leq T\right\}$. Dann gilt:

$$L^W(\mathfrak{a}, T) = \dot{\bigcup_{\mathfrak{b}}}\overline{L}^W(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T),$$

wobei die disjunkte Vereinigung über alle ganzen Ideale $\mathfrak{b}$ läuft. Beachte, dass die Menge $\overline{L}^W(\mathfrak{ab},T)$ für $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) > \frac{T}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})}$ leer ist. Somit folgt, da die Menge der ganzen Ideale mit Norm kleiner gleich einer Konstanten endlich ist (siehe Lemma 6.3), dass die Vereinigung endlich ist. Die Abbildung $\overline{L}^W(\mathfrak{c},T) \to \tilde{L}^W(\mathfrak{c},T)$ mit $UX \mapsto K^*X$ ist eine Bijektion, daher gilt:

$$\lambda^W(\mathfrak{a},T) = \sum_{\mathfrak{b}} \tilde{\lambda}^W(\mathfrak{ab},T).$$

Weiter folgt $\lambda^W = \chi_0 \tilde{\lambda}^W$, also $\mu\lambda^W = \mu\chi_0\tilde{\lambda}^W = \tilde{\lambda}^W$. $\circledast$
Nach Theorem 4.4 gilt $\lambda^W = f + g$, wobei

$$f(\mathfrak{d}) = c_n \|\mathfrak{d}\|^n \text{ und } g(\mathfrak{d}) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right) + 1.$$

Also $\mu\lambda^W = \mu f + \mu g$ und mit Lemma 6.2 folgt:

$$\begin{aligned}
&\mu\lambda^W(\mathfrak{d}) \\
&= \underbrace{\frac{c_n}{\zeta_K(n)}\|\mathfrak{d}\|^n + O(\|\mathfrak{d}\|)}_{\mu f(\mathfrak{d})} + \underbrace{O(\|\mathfrak{d}\|) + \begin{cases} O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1}\right)\right)\right) & \text{für } d=1, n=2 \\ O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right) & \text{sonst} \end{cases}}_{\mu g(\mathfrak{d})} \\
&= \frac{c_n}{\zeta_K(n)}\|\mathfrak{d}\|^n + O(\|\mathfrak{d}\|) + \begin{cases} O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1}\right)\right)\right) & \text{für } d=1, n=2 \\ O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right) & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Somit folgt mit der Identität $\circledast$ die Behauptung. $\square$

Mit diesem Resultat ist es nun möglich den verallgemeinerten Satz von Schanuel zu beweisen.

Verallgemeinerter Satz von Schanuel 0.2 *Die Anzahl der Punkte in L mit Höhe kleiner gleich T ist*

$$\mathrm{N}(L,T) = h\frac{c_n}{\zeta_K(n)}T^{nd} + \begin{cases} O\left(\frac{T}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)\right)\right) + O(T) & \textit{falls } d=1, n=2 \\ O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^{nd-1}\right) + O\left(T^d\right) & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n und K abhängen kann, h die Klassenzahl ist und

$$c_n = \frac{R}{\omega}\,\mathrm{D}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}^{-n/2}\, n^{r+s-1}\alpha(n)^r\{2^n\alpha(2n)\}^s\,\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^{-d}.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{a}_i$ ein Vertretersystem der Idealklassen. Dann ist die Anzahl der Punkte zu der Idealklasse $\mathrm{Cl}(\mathfrak{a}_i)$ mit Höhe kleiner gleich T: $\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{a}_i, T^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_i))$.
Somit gilt für $n = 2$ und $d = 1$:

$$\mathrm{N}(L,T) = \sum_i \tilde{\lambda}^W\left(\mathfrak{a}_i, T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right)$$

$$\stackrel{6.4}{=} \sum_i \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \left\|\left(\mathfrak{a}_i, T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right)\right\|^n + O\left(\left\|\left(\mathfrak{a}_i, T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right)\right\|\right)$$

$$+O\left(\frac{\left\|\mathfrak{a}_i, T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right\|}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{\left\|\mathfrak{a}_i, T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right\|}{\lambda_1}\right)\right)\right)$$

$$= \sum_i \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \left(T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)^{-1}\right)^n + O\left(T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)^{-1}\right)$$

$$+O\left(\frac{T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)^{-1}}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)^{-1}}{\lambda_1}\right)\right)\right)$$

$$= \sum_i \frac{c_n}{\zeta_K(n)} T^n + O\left(T\right) + O\left(\frac{T}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)\right)\right)$$

$$= h\frac{c_n}{\zeta_K(n)} T^n + O\left(T\right) + O\left(\frac{T}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)\right)\right).$$

Für alle anderen Fälle folgt:

$$\mathrm{N}(L,T) = \sum_i \tilde{\lambda}^W\left(\mathfrak{a}_i, T^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right)$$

$$\stackrel{6.4}{=} \sum_i \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \left\|\left(\mathfrak{a}_i, T^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right)\right\|^n + O\left(\left\|\left(\mathfrak{a}_i, T^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right)\right\|\right)$$

$$+O\left(\left(\frac{\left\|\left(\mathfrak{a}_i, T^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\right)\right\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right)$$

$$= \sum_i \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \left(T^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)^{-1}\right)^n + O\left(\left(T^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)^{-1}\right)\right)$$

$$+O\left(\left(\frac{T^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{a}_i\right)^{-1}}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right)$$

$$= \sum_i \frac{c_n}{\zeta_K(n)} T^{nd} + O\left(T^d\right) + O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^{nd-1}\right)$$

$$= h\frac{c_n}{\zeta_K(n)} T^{nd} + O\left(T^d\right) + O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^{nd-1}\right).$$

$\square$

Literatur

[BG] Bombieri, E.; Gubler, W.: *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs 4; Cambridge University Press, Cambridge 2006, xvi+652 S.

[Bo] Bosch, S.; *Algebra*; 4. überarbeitete Auflage; Springer, Berlin 2001, viii+376 S.

[Br] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*, Übersetzung aus dem Russischen, 5. überarbeitete und erweiterte Auflage der Neubearbeitung; : Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 2001 xxxviii+1196 S.

[Eb] Ebeling, W.; *Lattices and codes, a course partially based on lectures by F. Hirzebruch*; Advanced Lectures in Mathematics; Vieweg & Sohn, Braunschweig 1994, xii+178 S.

[Ha] Haupt, O.; Aumann, G.; Pauc, C.; *Differential- und Integralrechnung unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse, Band II: Differentialrechnung*, 2. völlig neubearbeitete Auflage; Walter de Gruyter & Co., Berlin 1950, 210 S.

[J] Jacobson, N.; *Basic Algebra II*, Second edition; W.H. Freeman & Company, New York 1985, xviii+499 S.

[Ja] Jameson, G.J.O.; *The prime number theorem*, London Mathematical Society Student Texts 53; Cambridge University Press, Cambridge 2003, x+252 S.

[Ka] Kaballo, W.; *Einführung in die Analysis II* , Hochschultaschenbuch; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1997, x+266 S.

[Ko] Koch, H.; *Zahlentheorie, Algebraische Zahlen und Funktionen*; Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1997, xii+344 S.

[Kö] Königsberger, K.; *Analysis 2*; Springer, Berlin 1993, ix+366 S.

[La] Landau, E.; *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale*, 2. Auflage; B. G. Teubner, Leibzig 1927, vii+147 S.

[L1] Lang, S.; *Algebra*, Revised third edition, Graduate Texts in Mathematics 211; Springer, New York 2002, xvi+914 S.

[L2] Lang, S.; *Algebraic number theory*, Addison-wesley Series in Mathematics; Addison-Wesley Publishing Company Inc, Reading (Mass.) 1970, xi+354 S.

[L3] Lang, S.; *Fundamentals of Diophantine geometry*; Springer, New York 1983, xviii+370 S.

[L4] Lang, S.; *Number theory III, Diophantine geometry*; Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 60. Springer, Berlin 1991, xiv+296 p.

[Le] Leutbecher, A.; *Zahlentheorie - Eine Einführung in die Algebra*; Springer, Berlin 1996, xii+354 S.

[Nag] Nagell, T.; *Introduction to Number Theory*; John Wiley & Sons, Inc., New York 1951; Almqvist & Wiksell, Stockholm 1951, 309 S.

[Na] Narkiewicz, W.; *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, 2nd ed., substantially revised and extended; Springer, Berlin etc. 1990; PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1990, xiii+746 S.

[S] Schanuel, S.; *Heights in number fields*; Bull. Soc. Math. France 107 (1979), no. 4, 433–449.

[Sch] Schmidt, W.M.; *On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations*; Ann. Math. (2) 85 (1967) 430-472

[ST] Stewart, I.; Tall, D.; *Algebraic number theory*; Chapman and Hall Mathematics Series, London; A Halsted Press Book, John Wiley & Sons, New York 1979, xviii+257 S.

[Th1] Thunder, J.L.; *An asymptotic estimate for heights of algebraic subspaces*; Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), no. 1, 395–424

[Th2] Thunder, J.L.; *Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties*; Compositio Math. 88 (1993), no. 2, 155–186

[WW] Whittaker, E.T.; Watson, G.N.; *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with* *an account of the principal transcendental functions*; Cambridge Mathematical Library; Reprint of the fourth (1927) edition; Cambridge University Press, Cambridge 1969, vi+608 S.

Erklärung

- Ich erkläre mich damit einverstanden, dass meine Diplomarbeit nach § 6 Abs.1 des URG der Öffentlichkeit durch die Übernahme in die Bereichsbibliothek zugänglich gemacht wird. Damit können Leser der Bibliotheken die Arbeit einsehen und zu persönlichen wissenschaftlichen Zwecken Kopien aus dieser Arbeit anfertigen. Weitere Urheberrechte werden nicht berührt.

- Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst, sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Dortmund, im Februar 2007 Christian Mathias Christensen