

Lineare Algebra I

Präsenzübung 4

Für die Bearbeitung der Aufgaben siehe man auch Kapitel 2.2 des Skriptes.

Aufgabe 1

Man löse das folgende lineare Gleichungssystem mittels elementaren Umformungen einmal über den rationalen Zahlen \mathbb{Q} und einmal unter der Annahme, dass die Koeffizienten aus dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ stammen:

$$\begin{array}{rccccrcr}
 x_1 & -x_2 & +2x_3 & & & +2x_5 & = & 0 \\
 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +4x_4 & & & = & 0 \\
 -x_1 & -2x_2 & -5x_3 & -x_4 & & -4x_5 & = & 0 \\
 & x_2 & +x_3 & +2x_4 & & -x_5 & = & 0 \\
 x_1 & +x_2 & +4x_3 & +6x_4 & & -x_5 & = & 0
 \end{array}$$

Aufgabe 2

Man gebe zu den folgenden linearen Gleichungssystemen (über \mathbb{Q}) die zugehörige Koeffizientenmatrix bzw. erweiterte Koeffizientenmatrix an. Des Weiteren löse man die linearen Gleichungssysteme mittels elementaren Umformungen. Gib jeweils den Typ der elementare Umformung und zum Schluß auch die Lösungsmenge an.

(i)

$$\begin{array}{rccccrcr}
 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & -7x_4 & = & 0 \\
 3x_1 & +8x_2 & +x_3 & -7x_4 & = & 0 \\
 x_1 & +4x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 0 \\
 x_1 & +3x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 0
 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rccccrcr}
 & x_2 & +x_3 & = & 1 \\
 x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 0 \\
 x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = & 1
 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{rccccrcr}
 2x_1 & & +x_3 & & = & 0 \\
 & x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 5 \\
 x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = & 2 \\
 3x_1 & +3x_2 & & & = & 6
 \end{array}$$

Lineare Algebra I Präsenzübung 5

Aufgabe 1

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum. Man mache sich dies noch einmal klar. In dieser Aufgabe geht es um die Umkehrung der Aussage, d.h. jeder Untervektorraum ist auch Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems.

Finde zu den folgenden Untervektorräumen des \mathbb{R}^3 jeweils ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge der Untervektorraum ist. Überprüfe dies, indem du auch die Lösungsmenge der von dir gefundenen Gleichungen bestimmst.

$$U_1 := \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_2 := \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_3 := \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_4 := \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_5 := \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2

Welche Dimensionen haben die in Aufgabe 1 definierten Untervektorräume U_i ? Dazu schlage die Definition der Dimension im Skript zur Vorlesung nach (2.3.16 im Skript). Wieviele Gleichungen hast du jeweils gefunden?

Aufgabe 3

Üblicherweise werden die Lösungsvektoren eines linearen Gleichungssystems als Spaltenvektoren des K^n geschrieben. Analog können wir die Gleichungen als Zeilenvektoren des K^n auffassen. In den Beispielen aus Aufgabe 1 also Zeilen- und Spaltenvektoren des \mathbb{R}^3 .

Betrachte die von dir gefundenen Gleichungen aus Aufgabe 1. Fasse sie als Zeilenvektoren auf und bezeichne mit W_1, \dots, W_5 die davon erzeugten Untervektorräume. Wenn du also zum Beispiel drei Gleichungen gefunden hast, die U_1 als Lösungsraum haben, und diese mit den Zeilenvektoren w_1, w_2, w_3 bezeichnest, dann soll $W_1 = \text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\}$ sein. Welche Dimension haben die Untervektorräume W_1, \dots, W_5 ? Was fällt dir auf?

Lineare Algebra I (Lehramt)

Präsenzübung 6

Aufgabe 1 (ca. 15 min.)

Die Matrizen A, B und C mit Elementen aus \mathbb{R} seien definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne, soweit möglich, die folgenden Matrixausdrücke:

- $AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^2, B^2$ und C^2 ,
- C^{100} ,
- $A(BA - C)$ und $ACB + ABC$.

Aufgabe 2 (ca. 75 min)

Für $c \in \mathbb{R}$ sei M_c die Menge aller reellen 3×3 -Matrizen $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft, dass alle Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen in X gleich c sind. Die Elemente in $M := \bigcup_{c \in \mathbb{R}} M_c$ heißen *magische Quadrate*.

- Zeige, dass M ein Untervektorraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist. Zeige weiter, dass $M_c \neq \emptyset$ ist für alle $c \in \mathbb{R}$. Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$ für die M_c ein Untervektorraum ist.
- Zeige, dass für alle $X \in M_c$ die Gleichung $c = 3x_5$ gilt. Was folgt hieraus speziell für die Gestalt der X aus M_0 ?

- Ergänze das folgende magische Quadrat:

2	9	4

- Zeige, dass $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von M_0 bilden. Ergänze diese Basis zu einer Basis von M .

Lineare Algebra I
Präsenzübung 7**Aufgabe 1**

Man ergänze eine linear unabhängige Teilmenge der folgenden Vektoren zu einer Basis des Vektorraums \mathbb{F}_5^4 :

$$\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{1} \\ \bar{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Die Menge der 3×3 -Matrizen über \mathbb{Q} sei mit $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$ bezeichnet. Betrachte die Teilmenge

$$\text{Sym}_3(\mathbb{Q}) := \{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} : A^t = A\} \subseteq \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

der **symmetrischen Matrizen**. Hierbei ist A^t die zu A transponierte Matrix. Man zeige, dass $\text{Sym}_3(\mathbb{Q})$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$ ist. Welche Dimension hat $\text{Sym}_3(\mathbb{Q})$?

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $\text{Hom}_K(K^2, K^3)$ der K -Vektorraum der K -linearen Abbildungen $f : K^2 \rightarrow K^3$. Man zeige, dass die linearen Abbildungen $f_{ij} : K^2 \rightarrow K^3$ gegeben durch

$$f_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_j & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

wobei $i, k \in \{1, 2\}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$ linear unabhängig in $\text{Hom}_K(K^2, K^3)$ sind. Welche Dimension hat der K -Vektorraum $\text{Hom}_K(K^2, K^3)$?

Lineare Algebra I
Präsenzübung 8

Aufgabe 1

Man bestimme von den folgenden \mathbb{R} -linearen Abbildungen jeweils eine Basis von $\text{Kern}(F_i)$, $i = 1, 2$:

(i)

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ x \end{pmatrix}$$

(ii)

$$F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y + 3z \\ x + 4y - z \\ -7y + 5z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die 4×3 -Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$F_M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Man bestimme eine Basis des Kerns und des Bildes von F_M .

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ der \mathbb{R} -Vektorraum der 2×2 -Matrizen über \mathbb{R} und

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Man zeige, dass

$$F : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto AM - MA$$

eine \mathbb{R} -lineare Abbildung ist und bestimme dann eine Basis von $\text{Kern}(F)$.

Lineare Algebra I
Präsenzübung 9

Aufgabe 1

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ der 2×2 -Matrizen über \mathbb{Q} .

- (i) Man zeige, dass die Abbildung

$$F : \mathbb{Q}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{Q}^{2 \times 2}, A \mapsto A^t$$

linear ist. Hierbei bezeichnet A^t die zu A transponierte Matrix.

- (ii) Die mittels
- F
- definierte Abbildung

$$G : \mathbb{Q}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{Q}^{2 \times 2}, A \mapsto (\text{id} - F)(A) = A - F(A)$$

ist ebenfalls eine lineare Abbildung. Bestimme Basen von Kern(G) und Bild(G).

Aufgabe 2

Untersuche, wie viele lineare Abbildungen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F(v_i) = w_i$ es in den folgenden Situationen gibt.

- (i)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (ii)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (iii)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (iv)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = w_2 = w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$