

## Musterlösung zu Aufgabe 28

### Aufgabe 28

Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M_1, M_2 \subseteq V$  Teilmengen. Zeige

(a)  $\text{Lin}(M_1 \cap M_2) \subseteq \text{Lin } M_1 \cap \text{Lin } M_2$  und

(b)  $\text{Lin}(M_1 \cup M_2) \supseteq \text{Lin } M_1 + \text{Lin } M_2$

Gilt vielleicht sogar Gleichheit? Falls nicht, gib ein Gegenbeispiel an.

### Beweis von a)

$M_1$  und  $M_2$  können unendliche Mengen sein. Daher muss man die folgende Definition der linearen Hülle verwenden: Für eine beliebige Menge  $M$  ist

$$\text{Lin } M := \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m \mid m \in \mathbb{N}, v_i \in M, \alpha_i \in K \}$$

In Worten bedeutet dies, dass die Lineare Hülle von  $M$  aus allen Linearkombinationen besteht, die man mit endlich vielen Elementen aus  $M$  bilden kann. Diese Definition kann man im Skript auf Seite 62 finden oder man schaut in die Vorlesungsunterlagen vom 17.11.09. Nun zur Aufgabe.

Sei  $v \in \text{Lin}(M_1 \cap M_2)$ . Dann kann man  $v$  als Linearkombination von endlich vielen Elementen aus  $M_1 \cap M_2$  schreiben.

$$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}, v_i \in M_1 \cap M_2, \alpha_i \in K$$

Da alle  $v_i \in M_1$  sind, ist dies eine Linearkombination von Elementen aus  $M_1$ , also ist  $v \in \text{Lin } M_1$ . Nun sind die  $v_i$  aber ebenfalls aus  $M_2$ . Daher ist  $v$  auch eine Linearkombination von Elementen aus  $M_2$ . Insgesamt ist also  $v \in \text{Lin } M_1 \cap \text{Lin } M_2$ .

Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht. Dazu betrachtet man das folgende Gegenbeispiel:

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dann ist

$$\text{Lin}(M_1 \cap M_2) = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \text{Lin } M_1 \cap \text{Lin } M_2$$

## Beweis von b)

Sei  $v \in \text{Lin } M_1 + \text{Lin } M_2$ . Dann lässt sich  $v$  als Summe von einer Linearkombination mit Elementen aus  $M_1$  und einer Linearkombination mit Elementen aus  $M_2$  schreiben:

$$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^n \alpha'_j v'_j \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{N}, v_i \in M_1, v'_j \in M_2, \alpha_i, \alpha'_j \in K$$

Da alle  $v_i, v'_i \in M_1 \cup M_2$  sind, ist  $v$  eine Linearkombination mit Elementen aus  $M_1 \cup M_2$ , also  $v \in \text{Lin}(M_1 \cup M_2)$ .

In diesem Fall gilt sogar die Gleichheit. Um dies zu beweisen zeigt man die umgekehrte Inklusion  $\text{Lin}(M_1 \cup M_2) \subseteq \text{Lin } M_1 + \text{Lin } M_2$ .

Sei nun  $v \in \text{Lin}(M_1 \cup M_2)$  eine Linearkombination von Elementen  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  aus  $M_1 \cup M_2$ . Dann kann man diese Linearkombination in zwei Linearkombinationen spalten:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i: v_i \in M_1} \alpha_i v_i + \sum_{i: v_i \notin M_1} \alpha_i v_i$$

Klar ist, dass die linke Summe eine Linearkombination aus  $\text{Lin } M_1$  ist. Die rechte Summe ist eine Linearkombination von Elementen aus  $M_1 \cup M_2$ . Da sie nicht aus  $M_1$  sind, müssen sie aus  $M_2$  sein. Also ist die rechte Summe eine Linearkombination aus  $\text{Lin } M_2$  und es folgt  $v \in \text{Lin } M_1 + \text{Lin } M_2$ .

□