

# Existenz und Nichtexistenz von extremalen Gittern

Rudolf Scharlau

Technische Universität Dortmund

Technische Universität Darmstadt

21. Juni 2011

## Grundlagen – Gitter

### Definition 1.1

Ein (vollständiges) **Gitter** auf einem euklidischen Vektorraum  $(V, b)$  über  $\mathbb{Q}$  ist eine Teilmenge der Gestalt

$$\begin{aligned} L &= \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_n \end{aligned}$$

für eine Basis  $v_1, v_2, \dots, v_n$  von  $V$ .

Isomorphie, auch **Isometrie** genannt, von quadratischen Vektorräumen und (quadratischen) Gittern ist in offensichtlicher Weise definiert.

### Grundlagen

Gitter  
Geschlechter von Gittern  
Thetareihen

### Extremale Gitter

Modulare Gitter  
Extremalität von Modulformen und Gittern  
Existenz und Eindeutigkeit von extremalen Gittern

### Algorithmische Klassifikation

Eine allgemeine Strategie zur Klassifikation  
Einige Geschlechter der Stufen 2, 5, 7 und 11  
Laufende Untersuchungen: Offene Fälle für extremale Gitter

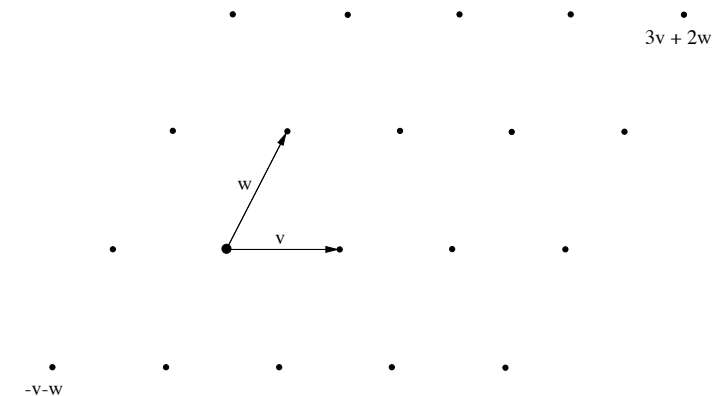


Abb. 1.1: Ein Gitter in der Dimension 2

Die grundlegendste Invariante eines Gitters (nach seiner Dimension) ist seine Determinante:

### Definition 1.2

Die **Gram-Matrix** eines Gitters  $L$  bezüglich einer Basis  $v_1, \dots, v_n$  ist die symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $(b(v_i, v_j))$ .

Die **Determinante**  $\det L$  von  $L$  ist die Determinante einer beliebigen Gram-Matrix of  $L$ .

Die Determinante ist das Quadrat des Volumens eines Fundamentalbereiches von  $L$ .

**Bezeichnung** Das **Minimum** eines Gitters ist die Quadratlänge eines kürzesten Vektors:

$$\min L := \min\{b(v, v) \mid v \in L, v \neq 0\}.$$

### Proposition 1.1

Jedes Gitter  $L$  besitzt eine Kugelpackungsdichte. Diese ist gegeben durch

$$\Delta(L) = \frac{\omega_n \cdot \left(\frac{\sqrt{\min L}}{2}\right)^n}{\sqrt{\det L}}.$$

Hierbei bezeichnet  $\omega_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel.

## Grundlagen – Kugelpackungen

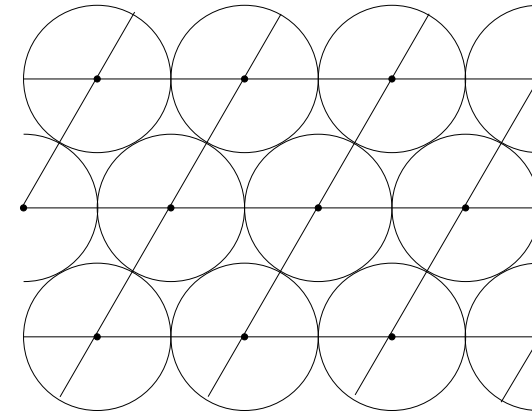


Abb. 1.2: Die Kreispackung zum hexagonalen Gitter

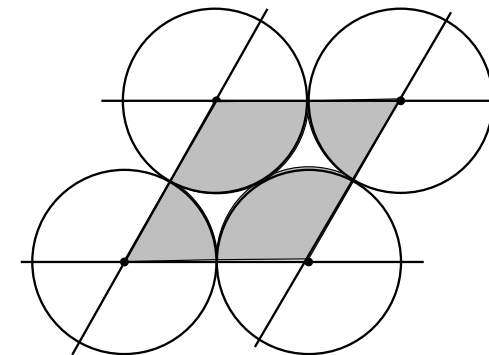


Abb. 1.3: Bestimmung der Dichte des hexagonalen Gitters innerhalb eines Fundamentalbereiches

### Definition 1.3

Ein Gitter  $L$  heißt **ganzzahlig**, falls  $b(L, L) \subseteq \mathbb{Z}$ . Gleichwertig,  $L \subseteq L^\#$ , wobei

$$L^\# := \{x \in V \mid \forall y \in L : b(x, y) \in \mathbb{Z}\}$$

das **duale Gitter** von  $L$  ist.

$L$  heißt **gerade**, wenn  $b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$  für alle  $x \in L$ . „Gerade“ impliziert „ganzzahlig“.

$L^\#$  wird von der dualen Basis (bezüglich der Bilinearform  $b$ ) einer beliebigen Basis von  $L$  erzeugt (ist also tatsächlich ein Gitter).

### Skalierung und Ähnlichkeit

Notation: Für  $c \in \mathbb{Q}^*$  und einen quadratischen Raum  $V$  oder ein Gitter  $L$  bezeichne mit  ${}^cV$ ,  ${}^cL$  den quadratischen Raum  $(V, cb)$ , bzw. das quadratische Gitter  $(L, cb)$ , mit Bilinearform  $(x, y) \mapsto c \cdot b(x, y)$ .

### Definition 1.5

Eine **Ähnlichkeit mit Norm  $c$**  ist eine lineare Abbildung  $\sigma : V \rightarrow W$  mit  $b_W(\sigma x, \sigma y) = c \cdot b_V(x, y)$ .

$L$  ist **ähnlich zu**  $M$  wenn  ${}^cL \cong M$  für ein  $c \in \mathbb{Q}^*$ .

Später werden wir besonders den Fall  $L = M^\#$  betrachten.

### Definition 1.4

Es sei  $L$  ein ganzzahliges Gitter. Die **Diskriminantengruppe** von  $L$  ist die Faktorgruppe  $L^\# / L$ . Ihre Ordnung ist  $|L^\# / L| = |\det L|$ .

Der **Exponent von  $L$**  ist der Exponent seiner Diskriminantengruppe, das heißt, die kleinste natürliche Zahl  $m$  so dass  $mL^\# \subseteq L$ .

Die **Stufe** eines geraden Gitters  $L$  ist die kleinste natürliche Zahl  $m$  so dass reskalierte duale Gitter  ${}^mL^\#$  (siehe unten) wieder gerade ist.

Die Stufe ist gleich dem Exponenten oder 2 mal dem Exponenten von  $L$ .

### Theorem 1.1 (Endlichkeit der Klassenzahl)

*Für eine gegebene Determinante  $d$  ist die Anzahl der Isometrieklassen von ganzzahligen Gittern mit Determinante  $d$  endlich.*

Dieses ist eine Konsequenz der **Reduktionstheorie**, die eine Gitterbasis liefert mit  $b(v_i, v_i) \leq C d^{1/n}$  für eine Konstante  $C$ . Die Konstante  $C$  hängt nur von der Dimension des Gitters ab, und von der zugrunde gelegten Reduktionstheorie. Wichtige Konzepte einer „reduzierten Basis“ wurden von Korkine und Zolotareff, Hermite, Minkowski, Voronoi und LLL (A. Lenstra, H. Lenstra und L. Lovasz) eingeführt.

## Grundlagen – Geschlechter von Gittern

Die Definition des Geschlechtes einer Gitters (oder einer ganzzahligen quadratischen Form) benutzt die  $p$ -adischen Zahlen. Zu jedem quadratischen Raum und jedem Gitter hat man eine **Vervollständigung** über  $\mathbb{Q}_p$  bzw.  $\mathbb{Z}_p$ .

### Definition 1.6

Zwei Gitter  $L$  und  $M$  liegen im gleichen **Geschlecht**, wenn  $L_p \cong M_p$  für all  $p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$ .

**Beispiel:** Das Gitter  $E_8 \perp {}^2E_8$  und das Barnes-Wall Gitter  $BW_{16}$  liegen im gleichen Geschlecht.

## Grundlagen – Thetareihen

Für ein gerades Gitter  $L$  von gerader Dimension  $n = 2k$  und Stufe  $\ell$ , bezeichnen wir mit

$$\Theta_L(q) = \sum_{m \geq 0} r_L(m) q^m, \quad r_L(m) := |\{x \in L \mid (x, x) = 2m\}|$$

seine **Thetareihe**, wobei wie üblich  $q = e^{2\pi iz}$  und  $z$  eine Variable in der oberen Halbebene in  $\mathbb{C}$  ist. Dieses ist eine Modulform vom Gewicht  $k$  für die Gruppe  $\Gamma_0(\ell)$  und einen gewissen quadratischen Charakter  $\varepsilon : \Gamma_0(\ell) \rightarrow \{\pm 1\}$ . Mit der Standard-Notation für die Aktion von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  auf der oberen Halbebenen heißt das

$$\Theta_L|_k \gamma = \varepsilon(\gamma) \Theta_L.$$

Zwei Gitter im gleichen Geschlecht haben die gleiche Determinante. Also:

### Korollar und Definition 1.7

Die Anzahl  $h(\mathcal{G})$  der Isometrieklassen in einem Geschlecht  $\mathcal{G}$  ist endlich. Sie heißt auch **Klassenzahl** des Geschlechtes.

**Grundlegende Fragestellung:** Bestimme explizit ein Repräsentantensystem und insbesondere die Klassenzahl eines gegebenen Geschlechtes von Gittern.

Der Charakter  $\varepsilon$  hängt nur von  $(-1)^k \det L$  ab und ist trivial, wenn diese Zahl, genannt die (signierte) Diskriminante von  $L$ , ein Quadrat ist. In diesem Fall hat man Modulformen vom Gewicht  $k$  und der Stufe  $\ell$  im strikten Sinne, d.h. invariant unter  $\Gamma_0(\ell)$ .

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{M}_k(\ell, \varepsilon)$  den endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum dieser Modulformen, und mit  $\mathcal{S}_k(\ell, \varepsilon)$  den Unterraum der Spitzenformen.

Wenn  $L$  und  $M$  Gitter im gleichen Geschlecht sind, dann ist die Differenz  $\Theta_L - \Theta_M$  eine Spitzenform.

## Grundlagen – Einige wichtige Gitter

- ▶ das Barnes Gitter  $P_6$ :  $n = 6$ ,  $\det = 7^3$ ,  $\min = 4$
- ▶ das Coxeter-Todd-Gitter  $K_{12}$ :  $n = 12$ ,  $\det = 3^6$ ,  $\min = 4$
- ▶ das Barnes-Wall-Gitter  $BW_{16}$ :  $n = 16$ ,  $\det = 2^8$ ,  $\min = 4$
- ▶ das Leech-Gitter  $\Lambda_{24}$ :  $n = 24$ ,  $\det = 1$ ,  $\min = 4$
- ▶ die Quebbemann-Gitter  $Q_{32}$ :  $n = 32$ ,  $\det = 2^{16}$ ,  $\min = 6$
- ▶ die Gitter  $P_{48p}, P_{48q}, P_{48n}$   $n = 48$ ,  $\det = 1$ ,  $\min = 6$
- ▶ das Nebe-Gitter (August 2010):  $n = 72$ ,  $\det = 1$ ,  $\min = 8$

## Modulare Gitter

### Definition 2.1 (H.-G. Quebbemann)

Es sei  $L$  ein ganzzahliges Gitter,  $\ell$  bezeichne den Exponenten seiner Diskriminanten-Gruppe  $L^\# / L$ . Das Gitter heißt **modular** wenn  ${}^\ell L^\# \cong L$ .

Ein Gitter ist also modular, wenn es ähnlich zu seinem dualen Gitter ist, und zwar mit einem ganz bestimmten Skalierungsfaktor. Notwendig ist dann  $\det L = \ell^{n/2}$ .

**Beispiel:** Das Gitter  $E_8 \perp {}^2 E_8$  und das Barnes-Wall Gitter  $BW_{16}$  sind modular von der Stufe 2.

## Extremale Gitter Die Grundidee

Unter anderem für das Kugelpackungsproblem sind Gitter mit großem Minimum (relativ zur Determinante) von Interesse.

Idee: ein (ganzzahliges) Gitter ist **extremal**, wenn sein Minimum so groß ist, wie „der“ Raum von Modulformen, in dem seine Thetareihe lebt, es erlaubt.

Im folgenden eine grobe Skizze der Präzisierung dieser Definition.

## Extremalität von Modulformen und Gittern

### Definition 2.2

a) Sei  $\mathcal{M}$  ein Unterraum von  $\mathcal{M}_k(\ell)$ . **Extremalität ist definierbar** bezüglich  $\mathcal{M}$  wenn die Projektion  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^d$  auf die ersten  $d = \dim \mathcal{M}$  Koeffizienten der  $q$ -Entwicklung

$$f = \sum_{m \geq 0} a_m q^m \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_{d-1})$$

injektiv ist. Das eindeutige Element  $F_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$  mit  $q$ -Entwicklung

$$F_{\mathcal{M}} = 1 + \sum_{m \geq d} a_m q^m$$

heißt dann **extremale Modulform** in  $\mathcal{M}$ .

b) Es sei  $L$  ein gerades Gitter der Dimension  $2k$  und der Stufe  $\ell$  und  $\mathcal{M}$  ein Unterraum von  $\mathcal{M}_k(\ell, \varepsilon)$  mit  $\Theta_L \in \mathcal{M}$  (wobei  $\varepsilon$  wie oben den Charakter zur signierten Diskriminante von  $L$  bezeichnet).  $L$  ist **extremal bezüglich**  $\mathcal{M}$ , wenn Extremalität definierbar ist bezüglich  $\mathcal{M}$ , und  $\Theta_L = F_{\mathcal{M}}$ .

Das heißt, die Thetareihe beginnt mit möglichst vielen Nullen (nach der 1), wie gewünscht.

Quebbemann hat auch eine Verallgemeinerung auf „stark-modulare“ Gitter der Stufen  $\ell = 6, 14, 15$  angegeben, unter Benutzung der sog. Atkin-Lehner-Involutionen.

**Theorem 2.2 (Endlichkeitssatz)**

*In der Situation von 2.1 hat die extremale Modulform für nur endlich viele Gewichte  $k$  lauter nicht-negative Einträge. Folglich existieren extremale Gitter nur bis zu einer gewissen (von  $\ell$  abhängigen) Dimension.*

Die Minima von (hypothetischen) extremalen Gittern sind a priori bekannt und haben folgende Werte:

**Theorem 2.1 (H.-G. Quebbemann)**

Für modulare Gitter von Primzahlstufe  $\ell \in \{2, 3, 5, 7, 11, 23\}$  ist Extremalität definierbar mit einem gewissen Unterraum

$$\mathcal{M}_k(\ell, \varepsilon, +) \subset \mathcal{M}_k(\ell, \varepsilon).$$

Der Unterraum ergibt sich leicht aus der wohlbekannten Transformationsformel für die Thetareihe des dualen Gitters. Der eigentliche Beweis benutzt eine Beschreibung von  $\mathcal{M}_k(\ell, \varepsilon, +)$  als eine Polynom-Algebra, erzeugt von Produkten von  $\eta$ -Funktionen, wie im klassischen Fall der vollen Modulgruppe ( $\ell = 1$ ).

Das Minimum  $m_{\text{ext}}(n, \ell)$  von (hypothetischen) extremalen Gittern

$n$	$\ell$	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
4		-	2	2	2	2	2	4	4	4	6
6		-	-	2	-	-	4	4	-	-	(8)
8		2	2	2	4	4	4	6	6	6	(10)
10		-	-	2	-	-	4	6	-	-	(12)
12		-	2	4	4	4	6	8	8	8	
14		-	-	4	-	-	6	8	-	-	
16		2	4	4	6	6	6	(10)	10	10	
18		-	-	4	-	-	8	10	-	-	
20		-	4	4	6	6	8	(12)	12	12	
22		-	-	4	-	-	8				
24		4	4	6	8	8	10				

$n$	$\ell$	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
28		–	4	6	8	8	10				
32		4	6	6	10	10	12				
36		–	6	8	10	10					
40		4	6	8	12	12					
44		–	6	8	12	12					
48		6	8	10							
52		–	8	10							
56		6	8	10							
60		–	8	12							
64		6	10	12							
72		8	10								
80		8	12								

Siehe [SchaSchu99] für detaillierte Informationen zu diesen Tabellen.

Eine natürliche Gram-Matrix für  $J_3$  ist

$$J_3 \cong \begin{pmatrix} 2 & \bar{\alpha} & 1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sie erscheint auch in der Arbeit von Mimura [Mim82], wo hermitesche Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern, die von Vektoren der Norm 2 erzeugt werden, in einem „direkten“ Ansatz klassifiziert werden.

Das gewünschte extremale 7-modulare Gitter erhält man aus  $J_3$  durch Verlagerung (transfer) mittels der Spurabbildung. Es ist isometrisch zum Barnes-Gitter  $P_6$  und zum Craig-Gitter  $A_6^{(3)}$ .

## Existenz und Eindeutigkeit von extremalen Gittern

### Beispiel: die Barnes Gitter in Dimension 6

Es gibt ein wohlbekanntes hermitesches  $\mathbb{Z}[\alpha]$ -Gitter,  $\alpha = \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ , von Dimension 3 und Minimum 2, das wir mit  $J_3$  bezeichnen ([Coh76] folgend). Seine unitäre Automorphismengruppe ist  $U(J_3) \cong 2 \times G_{168}$ , wobei  $G_{168} \cong L_3(2) \cong L_2(7)$  die bekannte einfache Gruppe der Ordnung 168 ist.

Die Gruppe  $U(J_3)$  ist eine primitive irreduzible komplexe Spiegelungsgruppe, no. 24 in der Liste von Shephard und Todd [ShTo54].

### Extremale Gitter mit Minimum 4

**Resultat:** (Durch Inspektion) Es sei  $\ell$  wie eben. Für jede Dimension  $n$  so, dass  $m_{\text{ext}}(n, \ell) = 4$ , existiert ein extremales Gitter.

In der kleinsten Dimension  $n = n(\ell) = 24, 16, 12, 8, \dots$  ist das extremale Gitter eindeutig: Leech, Barnes-Wall, Coxeter-Todd,  $Q_8$ , Barnes, ....

### Extremale Gitter mit Minimum 6

Es sei  $\ell$  wie oben. Für jede Dimension  $n$  so, dass  $m_{\text{ext}}(n, \ell) = 6$ , existiert ein extremales Gitter, mit Ausnahme von  $(12, 7^6)$  und eventuell  $(20, 5^{10})$ .

Das extremale Gitter mit Minimum 6 ist eindeutig in den Fällen  $(16, 5)$  (Bachoc, Nebe and Venkov [BaVeNe01]),  $(8, 11)$ ,  $(8, 14)$ ,  $(4, 23)$  (minimale Dimensionen) und  $(14, 7)$  (nicht minimal).

**Dimension 80:** Die beiden ersten extremalen Gitter in Dimension 80, für die das Minimum 8 tatsächlich verifiziert werden konnte, wurde 1997 von Christine Bachoc und Gabriele Nebe konstruiert. [BaNe98].

Kürzlich wurde von Damien Stehlé und Mark Watkins [SteWa10] gezeigt, dass ein von Rainer Schulze-Pillot bereits 1992 konstruiertes Gitter tatsächlich extremal ist und nicht isometrisch zu einem der Bachoc-Nebe Gitter.

Ein viertes extremales Gitter in Dimension 80 wird in [Wat10] angegeben.

### Extremale Gitter mit Minimum 8

Wir gehen nur auf den unimodularen Fall  $\ell = 1$  ein. Das folgende spektakuläre Resultat von Gabriele Nebe beantwortet eine mehrere Jahrzehnte lang offene Frage:

**Theorem 2.3 (G. Nebe, 2010)**

*Es existiert ein gerades unimodulares Gitter der Dimension 72 mit Minimum 8.*

Dieses Gitter kann als Tensorprodukt über dem Ring  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}] =: R$  des Barnes-Gitters  $J_3$  mit mit einer komplexen Form des Leech-Gitters konstruiert werden:

$$J_3 \otimes_R \Lambda_R.$$

## Algorithmische Klassifikation

### Eine allgemeine Strategie zur Klassifikation

Für ein gegebenes Geschlecht  $\mathcal{G}$  konstruiere ein Repräsentantensystem in folgenden drei Schritten.

1. Erzeuge Gitter in  $\mathcal{G}$  mittels einer geeigneten algebraischen Prozedur.
2. Teste für jeden Kandidaten die Isometrie zu den schon gefundenen Gittern.
3. Überprüfe die Vollständigkeit der Liste.

**Schritt 1** wird typischerweise mit den Kneser'schen Methode der benachbarten Gitter behandelt.

Alle Nachbarn von  $L$  können effizient aus den Klassen von  $L/2L$  konstruiert werden.

**Schritt 2** ist eine Frage von Invarianten (Thetareihen, Ordnung der Automorphismengruppe, sukzessive Minima, ...) und von ausgefeilten Algorithmen für den Test auf Isometrie eines Paares von Gittern (Plesken und Souvignier).

**Schritt 3** wird durch den folgenden Satz abgedeckt:

## Einige Geschlechter der Stufen 2, 5, 7 und 11

### Proposition 3.1 (Stufe 11, Dimension 12)

Das Geschlecht  $\Pi_{12}(11^6)$  hat Klassenzahl 67323. Es enthält

27193 Gitter mit Minimum 2

40036 Gitter mit Minimum 4

94 Gitters mit Minimum 6

**kein** Gitter mit Minimum 8.

Dieses beweist erneut die Nicht-Existenz eines extremalen Gitters in diesem Geschlecht, die zuerst von Nebe und Venkov mit Siegelischen Modulformen gezeigt wurde.

### Theorem 3.1 (Die Minkowskische Maßformel)

Sei  $L = L_1, \dots, L_h$  ein Repräsentantensystem eines Geschlechtes positive definiten Gitter der Dimension  $n$ . Die Summe der Inversen der Ordnungen ihrer Automorphismengruppen ist das Produkt von gewissen (Inversen von) **Darstellungs-Dichten**  $\alpha_p(L, L)$ , wobei  $p$  über alle Primzahlen läuft, mit einem gewissen Faktor „im Unendlichen“:

$$\sum_{j=1}^h \frac{1}{|O(M_j)|} = \gamma(n) \prod_p \alpha_p^{-1}(L, L).$$

Die Automorphismengruppen für das Geschlecht  $\Pi_{12}(11^6)$ :

setze  $o(L) := |\text{Aut}(L)|$ :

Es gibt

16613 Gitter (24.7%) mit trivialer Gruppe, i.e.  $o(L) = 2$

50641 Gitter mit  $4 \mid o(L)$

6065 Gitter mit  $3 \mid o(L)$

421 Gitter mit  $5 \mid o(L)$

0 Gitter mit  $7 \mid o(L)$  or  $13 \mid o(L)$

1 Gitter mit  $11 \mid o(L)$

### Proposition 3.2 (Stufe 7, Dimension 14)

Das Geschlecht  $\Pi_{14}(7^5)$  hat Klassenzahl 8664. Es enthält 8516 Gitter mit Minimum 2 und 148 Gitter mit Minimum 4.

Weitere Daten für dieses Geschlecht: setze  $o(L) := |\text{Aut}(L)|$ :

5261 Gitter mit  $3 \mid o(L)$

631 Gitter mit  $5 \mid o(L)$

84 Gitter mit  $7 \mid o(L)$

0 Gitter mit  $11 \mid o(L)$  oder  $13 \mid o(L)$

24 Gitter mit  $o(L) = 2$

Also: In diesem großen Geschlecht sind die Gitter mit „trivialer“ Automorphismengruppe (noch) selten. Für  $\det \rightarrow \infty$  bilden sie beweisbar (J. Biermann) die Mehrheit.

Die folgende genauere Information über das Geschlecht  $\Pi_{14}(7^7)$  kommt aus einer Monate langen Rechnung mit dem Programm `tn`, die im Februar 2011 beendet wurde.

### Proposition 3.3

Das Geschlecht  $\Pi_{14}(7^7)$  hat Klassenzahl 83006. Es enthält genau

46574 Gitter mit Minimum 2

36431 Gitter mit Minimum 4

1 Gitter mit Minimum 6.

### Theorem 3.2 (B. Hemkemeier, R.S., 2010/11)

Es existiert ein eindeutiges extremales Gitter in Dimension 14 und von der Stufe 7.

Es hat  $560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$  Minimalvektoren (der Norm 6) und  $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$  Automorphismen,  $\text{Aut}(L) \cong \text{PSL}(8) \times 2$ .

Die Automorphismengruppen für das Geschlecht  $\Pi_{14}(7^7)$ :  
setze  $o(L) := |\text{Aut}(L)|$ :

Es gibt

12827 Gitters (15.4%) mit trivialer Gruppe, i.e.  $o(L) = 2$

70108 Gitter mit  $4 \mid o(L)$

11797 Gitter mit  $3 \mid o(L)$

353 Gitter mit  $5 \mid o(L)$

82 Gitter mit  $7 \mid o(L)$

0 Gitter mit  $11 \mid o(L)$  or  $13 \mid o(L)$

### Proposition 3.4 (Stufe 5, Dimension 16; siehe auch [GrLam10])

Das Geschlecht  $\Pi_{16}(5^4)$  hat Klassenzahl 848. Es enthält genau ein Gitter mit Minimum 4. Dieses Gitter hat  $2640 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$  Minimalvektoren und  $288,000 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3$  Automorphismen.

Weitere Daten für dieses Geschlecht: setze  $o(L) := |\text{Aut}(L)|$ :

- 831 Gitter mit  $3 \mid o(L)$
- 529 Gitter mit  $5 \mid o(L)$
- 155 Gitter mit  $7 \mid o(L)$
- 8 Gitter mit  $11 \mid o(L)$
- 0 Gitter mit  $13 \mid o(L)$

## Laufende Untersuchungen: Offene Fälle für extremale Gitter

Mitglieder meiner Arbeitsgruppe in Dortmund arbeiten zur Zeit daran, einige der verbliebenen Lücken in den obigen Tabellen zu schließen:

- ▶ Zeige für das Geschlecht  $(14, 11^7)$ , dass kein (modulares) Gitter vom Minimum 8 existiert.
- ▶ Untersuche entsprechend den Fall  $(18, 11^9)$ , Minimum 10.
- ▶ Zeige die Existenz oder Nicht-Existenz von einem extremalen Gitter (mit Minimum 6) im Geschlecht  $(20, 5^{10})$
- ▶ Untersuche die Fälle  $(2k, 7^k)$  für  $k \geq 11$  (Minimum  $\geq 8$ )






### Theorem 3.3 (Stufe 2, Dimension 20)






Das Geschlecht  $\Pi_{20}(2^{10})$  hat Klassenzahl 546. Es enthält genau drei Gitter mit Minimum 4. Diese Gitter sind modular und folglich extremal. Die Ordnungen ihrer Automorphismengruppen sind







$$2^{14}3^65^{11}11^1, 2^83^35^{11}11^1, 2^{14}3^25^1.$$






Bachoc and Venkov haben schon 1998 gezeigt, dass diese Gitter die einzigen mit Minimum 4 sind. Der Beweis benutzt Thetareihen mit sphärischen Koeffizienten und sphärische Designs. Er ist lang und kompliziert.

- ▶ Entscheide, ob ein extremales Gitter im Fall  $(36, 3^{18})$  existiert („dichteste“ Kugelpackung).
- ▶ Analysiere systematisch hermitesche Strukturen, einschließlich hermitescher Tensorprodukte, auf (bekannten) modularen und extremalen Gittern.
- ▶ Untersuche die sukzessiven Minima, insbesondere die „well-roundedness“ von  $p$ -elementaren Gittern.
- ▶ Analysiere und verbessere die bestehenden Isometrie-Algorithmen für Gitter (Vektorsummen von Plesken und Souvignier, Tiefen-Parameter, Bacher-Polynome, Backtracking von Leon).

-  C. Bachoc, G. Nebe: Extremal lattices of minimum 8 related to the Mathieu group  $M_{22}$ . J. reine angew. Math. **494** (1998).
-  C. Bachoc, B. Venkov, G. Nebe: Modular forms, lattices, and spherical designs. Appendix: Unicity of the extremal 5-modular Gitter of Dimension 16. In: *Réseaux euclidiens, designs sphériques et forms modulaires*, Monogr. Enseignement Math., Geneva 2001, 87-111.
-  E. S. Barnes, G. E. Wall: Some extreme forms defined in terms of Abelian groups. J. Australian Math. Soc. **1** (1959), 47-63.
-  C. Batut, H.-G. Quebbemann, R. Scharlau: Computations of cyclotomic lattices. Experimental Math. **4**, No. 3 (1995), 175-179.
-  A. M. Cohen: Finite complex reflection groups. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **9** (1976), 379-436.

-  G. Nebe: An even unimodular 72-Dimensional Gitter of minimum 8. arXiv:1008.2862v3 [math.NT] (August 2010).
-  W. Plesken, B. Souvignier: Computing isometries of lattices. J. Symbolic Comp. **24**, no. 3/4 (1997), 327-334.
-  H.-G. Quebbemann: Zur Klassifikation unimodularer Gitter mit Isometrie von Primzahlordnung. J. reine angew. Math. **326** (1981), 158-170.
-  H.-G. Quebbemann: Modular lattices in Euclidean Spaces. J. of Number Theory **54** (1995), 190-202.
-  H.-G. Quebbemann: Atkin-Lehner eigenforms and strongly modular lattices. L'Enseignement Mathématique **43** (1997), 55-65.

-  J. H. Conway, N.J.A. Sloane: *Sphere packings, lattices and groups*. Springer-Verlag New York, 1988.
-  H. S. M. Coxeter, J. A. Todd: An extreme duodenary form. Canad. J. Math. **5** (1953), 384-392.
-  R.L. Griess Jr., Ching Hung Lam: A moonshine path for 5A and associated lattices of ranks 8 and 16. arXiv:1006.3907v1 [math.GR] (June 2010).
-  O. King: A mass formula for unimodular lattices mit no roots. Math. Comp. **72** (2003), 839-863.
-  Y. Mimura: On 2-lattices in an hermitian space. Math. Japonica **27** (1982), 213-224.
-  G. Nebe, B.B. Venkov: Non-existence of extremal lattices in certain genera of modular lattices. J. of Number Theory, **60**, No. 2

-  R. Scharlau, B. Hemkemeier: Classification of integral lattices with large class number. Math. of Comput. **67**, No. 222, 737-749 (1998).
-  R. Scharlau, R. Schulze-Pillot: Extremal lattices, In *Algorithmic Algebra and Number Theory*, edited by B.H. Matzat, G.-M. Greuel, G. Hiss, Springer Verlag 1999.
-  G. C. Shephard, J. A. Todd: Finite unitary reflection groups. Canad. J. Math. **6** (1954), 274-304.
-  D. Stehlé, M. Watkins: On the Extremality of an 80-Dimensional lattice. Proceedings from ANTS-IX, Springer 2010.
-  M. Watkins: Another 80-Dimensional extremal lattice. To appear in Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux.